***Загадочный и удивительный мир « знакомых» и «незнакомых» чисел.***

**Введение**

Можно ли представить себе мир без чисел? Возьмите то, что мы делаем изо дня в день: без чисел - ни покупки не сделаешь, ни времени не узнаешь, ни номера телефона не наберешь. А космические корабли, лазеры и все другие технические средства и достижения. Они были бы попросту невозможны, если бы не наука о числах. Само возникновение понятия числа - одно из гениальных проявлений человеческого разума. Действительно, числа измеряют, сравнивают, вычисляют, а еще рисуют, проектируют, играют, делают умозаключения, выводы.

Самые древние по происхождению числа натуральные. В начальной школе мы знакомимся с четными и нечетными числами, на уроках математики во время внеурочной деятельности учитель нас познакомил с простыми числами. Разнообразие чисел меня заинтересовало так, что я решила узнать, а есть ли другие виды чисел. Оказывается, среди натуральных чисел есть еще совершенные, дружественные, репьюниты.

**Гипотеза:**

Если простые числа – это «кирпичики», из которых строятся все натуральные числа, то, «перекладывая» их, можно получить удивительные «числовые сооружения».

**Объект исследования** – натуральные числа.

**Предмет исследования** – свойства натуральных чисел.

**Цель работы:** познакомиться с удивительными числами и установить роль простых чисел в изменении их свойств.

**Задачи:**

1. Описать способы поиска простых чисел.
2. Рассмотреть свойства совершенных и дружественных чисел.
3. Познакомиться с палиндромами и репьюнитами.

**Метод исследования** – изучение теории, вычисление, обобщение.

В школе мы провели исследовании и выяснили, что многие ребята слышали об этих числах, но подробную информацию знают единицы. 55 из 65 опрошенных учащихся хотели бы узнать об этих числах больше.

**Глава І. Разнообразие натуральных чисел.**

**1.1.Простые числа.**

Такие ли они «простые», эти простые числа?

**Числа, которые имеют только два различных делителя, называются простыми.** Например, 7=1∙7, 23=1∙23 и т. д. самое маленькое простое число – 2. Это единственное четное простое число.

Проведем небольшое исследование. Представим натуральные числа в виде произведения простых множителей: 12=2∙2∙3; 18=2∙3∙3; 140=2∙2∙5∙7 и т. д. Теперь легко объяснить роль простых чисел в математике: они являются теми кирпичиками, из которых при помощи умножения строят все остальные числа. Можно ли сосчитать все простые числа? Греческий геометр Евклид написал книгу «Начала», и одним из утверждений этой книги было следующее: самого большого простого числа не существует.

Т.к. простые числа играют важную роль в изучении всех остальных чисел, надо было составить их список. Конечно, нельзя было надеяться получить список всех простых чисел: мы уже знаем, что наибольшего простого числа нет. Поэтому составление списка всех простых чисел столь же безнадежное занятие, как составление списка всех натуральных чисел. Но можно попробовать составить список всех простых чисел, не превосходящих, например, тысячи. Над тем, как составлять списки, задумался живший в III веке до н. э. александрийский ученый Эрастосфен. Это был удивительно разносторонний человек: он занимался и теорией чисел, и изучал звезды. Но навсегда его имя вошло в науку именно в связи с придуманным или методом отыскания простых чисел. С «решетом Эратосфена» мы знакомились по учебнику. Рассмотрим несколько других интересных методов отыскания простых чисел. Разместим последовательность натуральных чисел в 6 столбцов (Приложение 1).

 Получим модель «решета» Эрастофена для отсеивания простых чисел. Все числа в кружочках – простые. Составные числа перечёркнуты. Систему проведения прямых, вычеркивающих составные числа, понять легко. Все простые числа от числа 5 и дальше свили себе гнёздышки только в 2 столбиках: в 4 и 6. Когда в какой-то строке 4 и 6 столбцов оба числа простые, то это пара «близнецов»: (5;7), (11;13), (17;19) и т.д.

Итак, простые числа можно обнаружить только путем долгих кропотливых расчетов. Недавно было найдено простое число, содержащее 25692 цифры! Чтобы доказать, что оно простое, быстродействующему компьютеру потребовалось несколько недель. Как видно, простые числа ловко прячутся, и поэтому их стали использовать в секретных шифрах, а мы воспользуемся простыми числами для отыскания удивительных чисел.

**1.2. Совершенные и дружественные числа**

**Делителем натурального числа называется такое число, на которое число а делится без остатка.**

**Натуральное число *п* называется совершенным, если сумма всех его собственных делителей, отличных от самого *п,* в точности равна *п.***

Знаменитый греческий философ и математик Никомах Герасский, живший в 1 в., отмечал, что совершенные числа красивы, а красивые вещи редки и немногочисленны. Он не знал, сколько имеется совершенных чисел. Не знаем этого и мы. До настоящего времени нет ответов на два важных вопроса:

1)Существует ли наибольшее совершенное число?

2) Существует ли нечетное совершенное число?

 Первым прекрасным совершенным числом, о котором знали математики Древней Греции, было число "6". На шестом месте на званном пиру возлежал самый уважаемый, самый почетный гость. В библейских преданиях утверждается, что мир был создан в шесть дней, ведь более совершенного числа, среди совершенных чисел, чем "6", нет, поскольку оно первое среди них.

 Рассмотрим число 6. Число имеет делители 1, 2, 3 и само число 6. Если сложить делители, отличные от самого числа 1 + 2 + 3 то мы получим 6. Значит, число 6 дружественно самому себе и является первым совершенным числом.

 Следующим совершенным числом, известным древним, было "28". Мартин Гарднер усматривал в этом числе особый смысл. По его мнению, Луна обновляется за 28 суток, потому что число "28" - совершенное. В Риме в 1917 году при подземных работах было открыто странное сооружение: вокруг большого центрального зала расположены двадцать восемь келий. Это было здание неопифагорейской академии наук. В ней было двадцать восемь членов. До последнего времени столько же членов, часто просто по обычаю, причины которого давным-давно забыты, полагалось иметь во многих ученых обществах. До Евклида были известны только эти два совершенных числа, и никто не знал, существуют ли другие совершенные числа и сколько таких чисел вообще может быть. Благодаря своей формуле, Евклид сумел найти еще два совершенных числа: 496 и 8128

 Почти полторы тысячи лет люди знали только четыре совершенных числа, и никто не знал, могут ли существовать еще числа, которые можно представить в евклидовской формуле, и никто не мог сказать, возможны ли совершенные числа, не удовлетворяющие

формуле Евклида. Формула Евклида позволяет без труда доказывать многочисленные свойства совершенных чисел.

 - Все совершенные числа треугольные. Это значит, что, взяв совершенные число шаров, мы всегда сможем сложить из них равносторонний треугольник.

- Все совершенные числа, кроме 6, можно представить в виде частичных сумм ряда кубов последовательных нечетных чисел 13 + 33 + 53…

- Сумма обратных всем делителям совершенного числа, включая его самого, всегда равна 2. До сегодняшнего дня не обнаружено ни одного нечетного совершенного числа, хотя и не доказано, что такого числа не существует. Все совершенное редко встречается в мире. Редко встречаются и совершенные числа.

 Испытав огромный массив последовательных натуральных чисел, исследователи нашли уже более 30 совершенных: 6, 28, 496, 8128, 33550336… Вот 25-е число: 244496 . (244496-1). В развёрнутой записи этого числа содержится 26790 цифр! Знакомясь с совершенными, нельзя не сказать о дружественных числах.

Однажды Пифагор на вопрос, кого следует считать другом, якобы ответил так: «Того, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284». Видимо, какое – то необычное свойство сблизило эти числа настолько, что сам Пифагор признал их парой дружественных чисел. Вот это свойство: 220=1·22·5·11 - делится на 1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110 (само число исключается из перечня делителей, тогда остальные делители называются собственными), а сумма всех собственных делителей числа 220 равна 284.

Возможно, что именно Пифагор и был первооткрывателем этой пары дружественных чисел - первой, наименьшей из возможных и единственно известной на протяжении более чем 15 последующих веков.

Дадим определение: **дружественными числами называются два натуральных числа, если сумма собственных делителей одного числа равна второму числу и, наоборот, сумма собственных делителей второго числа равна первому.**

Вторую пару: 17296 и 18416 – открыл марокканский учёный ибн аль-Банна (около 1300 г). Не зная этого через 300 лет (в 1636 г) эту же пару открыл Пьер Ферма.

Третью пару нашел Ране Декарт в 1638 году, а через 100 лет Эйлер излагает 5 различных методов выявления дружественных чисел и преподносит их ровно 59 пар!

К настоящему времени коллекция дружественных чисел превышает 1000 пар, в ней имеются теперь даже двадцатипятизначные пары чисел. Из этой коллекции ровно 13 пар размещаются на отрезке (1:100 000) (Приложение 2).

**1.3. Палиндромы и репьюниты.**

Дадим определения:

**Обращенное число – это число, записанное с теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке**. Например, 1234 обращенное 4321.

**Палиндромическое число - равное обращенному**. Например, 121, 5995, 12321 и т. д.

**Репьюниты - натуральные числа, запись которых состоит только из единиц**. В десятичной системе счисления репьюниты обозначаются короче - Rn: R1=1, R2=11, R3=111, R4=1111…

«Фамилия» этого семейства – Repunit - образована слиянием английских слов: repeated unit (повторенная единица). Обнаружено немало интересных свойств репьюнитов. Например, в семействе репьюнитов выявлено пока только 5 простых чисел: R2, R19, R23, R317 и R1031.

Интересна табличка простых делителей составных репьюнитов:

111=3∙ 37;

1111=11∙101;

11111=41∙271;

111111=3∙7∙ 11∙13∙37;

1111111=239∙ 4649 и т. д.

 В результате умножения репьюнитов получается палиндромическое число:

11∙11=121;

11∙111=1221;

1111∙11=12221;

1112=12321;

**Глава ΙΙ. Экспериментальная работа**

**2.1.Исследование совершенных и дружественных чисел.**

**І.** Проверим, что каждое из чисел 220 и 284;1184 и 1210;2620 и 2924 равно сумме делителей другого числа, не считая его самого.

1. Найдём делители чисел 220 и 284.

Делители 220: 1;2;11;10;5;44;22;110;20;55;4.

Делители 284: 1;2;142;71;4.

Вычислим сумму делителей числа 220: 1+2+11+10+5+44+22+110+20+55+4 = 284.

Вычислим сумму делителей числа 284: 1+2+142+71+4 = 220

Вывод: сумма делителей числа220 равна числу284, а сумма делителей числа 284 равна числу 220, значит, числа 220 и 284 являются дружественными.

1. Найдем делители чисел 1184 и 1210.

Делители 1184: 1;4;37;2;74;148;196;592;32;16;8.

Делители 1210: 1;2;605;5;121;11;10;110;55;22;242.

Вычислим сумму делителей числа 1184: 1+4+37+2+74+148+196+592+32+16+8 = 1210.

Вычислим сумму делителей числа 1210: 1+2+605+5+121+11+10+110+55+22+242 = 1184.

Вывод: сумма делителей числа 1184 равна числу 1210 , а сумма делителей числа 1210 равна числу 1184, значит, числа 1184 и 1210 являются дружественными.

1. Найдем делители чисел 2620 и 2924.

Делители 2620: 1;2;5;131;1310;655;4;10;20;262;524.

Делители 2924: 1;2;4;17;34;43;1462;731;86;68;172.

Вычислим сумму делителей числа 2620: 1+2+5+131+1310+655+4+10+20+262+524 = 2924.

Вычислим сумму делителей числа 2924: 1+2+4+17+34+43+1462+731+86+68+172 = 2620.

*Вывод*: сумма делителей числа 2620 равна числу 2924 , а сумма делителей числа 2924 равна числу 2620, значит, числа 2620 и 2924 являются дружественными.

**ІІ.** Проверим, что каждое из чисел 6, 28, 496, 8128, 33550336, равно сумме всех его делителей, не считая самого числа.

1. Найдем делители числа 6: 1;2;3.

Вычислим сумму его делителей 1+2+3 = 6.

1. Найдем делители числа 28: 1;2;4;7;14.

Вычислим сумму его делителей 1+2+4+7+14 = 28.

1. Найдем делители числа 496: 1;2;4;8;16;62;124;248,31.

Вычислим сумму его делителей 1+2+4+8+16+31+62+124+248 = 496.

1. Найдем делители числа 8128: 1;2;4;8;16;32;64;127;254;508;1016;2032;4064.

Вычислим сумму его делителей

1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064 = 8128.

1. Найдём делители числа 33550336: 1;2;4;8;16;32;64;128;256;512;1024;2048;4096;8191;16382;33764;65528;131056;

262112; 524224; 1048448; 2096896; 4193792; 8387584; 16775168.

Вычислим сумму его делителей

1+2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024+2048+4096+8191+16382+33764+65528+131056+

+262112+524224+1048448+2096896+4193792+8387584+16775168 = 33550336.

Вывод: сумма всех делителей этих чисел, не считая самого числа, равна самому числу, значит, это есть совершенные числа.

2.2. **Анкетирование учащихся и диагностика результатов по итогам исследовательской работы.**

Перед началом работы мы решили выяснить актуальность темы.

 Для этого провели в школе среди учащихся 1 – 11 классов анкетирование (Приложение 3) и выяснили, что с понятием натурального числа знакомы 94% опрошеных, какие числа называются простыми знают также 94%, какие числа называются дружественными – 6%, о числах – близнецах слышали 66%, о совершенных числах – 19%,какие натуральные числа называются палиндромами и репьюнитами не знает никто.

 55 из 65 опрошенных учащихся хотели бы узнать об этих числах больше.

Результаты обработки анкет в виде диаграмм представлены в Приложении 4.

На уроке математики, я познакомила учащихся с результатами исследовательской работы. Все факты вызвали большой интерес у моих товарищей.

**Заключение.**

Мир чисел настолько загадочен и увлекателен, что занимаясь данной работой, я понял: если бы каждый из нас уделял ему больше внимания, то нашел бы для себя много нового и интересного. Я познакомилась с удивительными натуральными числами: палиндромами и репьюнитами. Все они обязаны своими свойствами простым числам.

Значит, я подтвердила гипотезу о том, что простые числа – это часть чисел, из которых состоят все натуральные числа.

В результате изучения различных источников мы познакомились с удивительными натуральными числами: совершенными, дружественными, палиндромами и репьюнитами. Все они, кроме палиндромов, обязаны своими свойствами простым числам.

Предметом исследования стали совершенные и дружественные числа.

При выполнении работы было доказано, что 220 и 284, 1184 и 1210; 2620 и 2924 являются дружественными числами, а числа 6; 28; 496; 8128; 33550336 – совершенными. При нахождении делителей этих чисел мы раскладывали их на простые множители.

Анализ наших решений показал, что простые числа – это «кирпичики», из которых строятся все натуральные числа, «перекладывая» их, можно получить удивительные «числовые сооружения». Значит, я подтвердила гипотезу о том, что простые числа – это часть чисел, из которых состоят все натуральные числа.

Исследуя множество простых чисел, можно получить удивительные числовые множества с их необыкновенными свойствами.

Эта работа вызвала у нас интерес, и мы надеемся, что она заинтересует и других учащихся.

**Список литературы**

**1**.Волина И. А. Праздник числа. М. 1991.

**2**. Депман И. Я. Мир чисел. М. 1979.

**3**.Депман И. Я. Рассказы о математике. М. 1982.

**4**. Депман И. Я. Из истории математики. М. 1985.

**5**. Заболотных Т. А. «Использование исторического материала в обучении математике», журнал Математика в школе,1989 г., № 6, стр.11 – 12.

**6**. Сухинина Т. К. «Беседа на уроках математики», журнал Начальная школа, 1983 г., № 2, стр.7 – 9.

**7**.Математический энциклопедический словарь. – Москва «Советская энциклопедия» 1988г.