Муниципальное бюджетное образовательное учреждение

«Средняя общеобразовательная школа №1 имени В. П. Екимецкой»

Исследовательская работа

Числовые средние в трапеции.

Выполнила:

ученица 9А класса

Батманова Любовь.

Руководитель:

учитель математики

Сараева С. В.

Рязань, 2016

**Содержание:**

Введение…………………………………………………….3

1. Средние значения………………………………………..4
2. Средняя линия трапеции………………………………..5
3. Среднее геометрическое в трапеции…………………...5
4. Среднее квадратичное в трапеции……………………...6
5. Среднее гармоническое в трапеции…………………….7
6. Неравенства о средних в трапеции……………………..8
7. Где ещё встречаются средние значения………………..8

Заключение…………………………………………………10

Библиография………………………………………………11

**Введение**

Своим исследованием я начала заниматься год назад. Я всегда с интересом и удовольствием решала задачи по геометрии. В поисках новых сложных задач обращалась к учителю математики. Тогда мне было предложено прочитать статью в журнале Квант «Числовые средние и геометрия». Несмотря на то, что написана была эта статья уже давно, в 1990 году, для меня она оказалась необычайно актуальной, потому что именно в восьмом классе я изучала трапецию, а также познакомилась с понятием «среднее геометрическое» в разных разделах математики. Авторы статьи Александр Гольдман и Леонид Звавич предложили замечательные геометрические интерпретации алгебраических понятий. Многие геометрические факты читателям было предложено доказать самостоятельно. Работая со статьёй «Числовые средние и геометрия» я преследовала цель изучить новые для меня свойства геометрической фигуры трапеция. Для достижения этой цели я поставила перед собой следующие задачи:

1. Разобраться в существующих средних величинах;
2. Найти литературу, в которой также рассматривается материал по теме исследования;
3. Самостоятельно доказать свойства замечательных отрезков трапеции.
4. **Средние значения**

В быту под средним значением нескольких величин обычно понимают среднее арифметическое. Например, «средний рост», «средний вес», «средний балл». В математике же существует очень много различных «средних». Рассмотрим наиболее часто встречающиеся «средние» для двух положительных чисел. К ним относятся:

1. среднее арифметическое $m=\frac{a+b}{2}$,
2. среднее геометрическое $ g= \sqrt{ab}$,
3. среднее гармоническое $ $ $h= \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}= \frac{2ab}{a+b}$,
4. среднее квадратичное $ s= \sqrt{\frac{a^{2}+b^{2}}{2}}$.

Средние значения часто встречаются при решении различных текстовых задач. Так, средняя скорость лодки, проплывшей некоторое расстояние со скоростью $v\_{1}$, а обратный путь со скоростью $v\_{2}$, оказывается равной среднему гармоническому скоростей $v\_{1}$ и $v\_{2}$, то есть $\frac{2v\_{1}v\_{2} }{v\_{1}+v\_{2} }$.

Среднее геометрическое встречается в прямоугольном треугольнике, оно называется также средним пропорциональным. В школьном учебнике геометрии для прямоугольного треугольника рассматриваются следующие свойства:

1 «Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой».

2. «Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключённого между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла».[[1]](#footnote-2)

*A H*

 C B

$$BC= \sqrt{AB∙BH}, CH= \sqrt{AH∙BH}.$$

Авторы статьи «Числовые средние и геометрия» замечают: «Существует фигура, в которой все числовые средние двух чисел $a$ и $b$ можно увидеть «живьём» - это трапеция ABCD с основаниями BC = $a$ и AD = $b$»[[2]](#footnote-3). Мы условимся рассматривать трапецию, у которой $b>a.$

1. **Средняя линия трапеции.**

Наиболее известный отрезок из тех, длины которых являются средними величинами в трапеции, - это средняя линия трапеции, то есть отрезок, соединяющий середины её боковых сторон. В любой трапеции с основаниями, длины которых равны $a$ и $b$, длина средней линии равна среднему арифметическому длин оснований.

 B C К

 M N

A L D

Приведу доказательство этого факта. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ построим отрезок $MN$, концы которого являются серединами боковых сторон. Через точку *N* проведём прямую, параллельную боковой стороне *AB,*  и на пересечении этой прямой с прямыми, на которых лежат основания этой трапеции, поставим точки *K* и *L.* Треугольники *CNK и DNL* равны по стороне и прилежащим к ней углам. Значит, $CK=LD. $ Обозначим длину отрезка *MN* буквой *m.* Тогда $CK=m-a; LD=b-m. $ Из равенства отрезков *CK* и *LD* следует $m-a=b-m; 2m=a+b; $

$ m=\frac{a+b}{2}.$

1. **Среднее геометрическое в трапеции.**

Длина отрезка, параллельного основаниям трапеции, концы которого лежат на боковых сторонах, равна среднему геометрическому чисел $a$ и $b$, если он делит данную трапецию на две трапеции, подобные между собой.

Докажем это. Отрезок *KE* делит трапецию *ABCD* на две подобные трапеции *AKED* и *KBCE*. Значит, отношения соответствующих сторон в этих трапециях равны.

$\frac{KE}{BC}=\frac{AD}{KE}$ ; $KE^{2}=BC∙AD$; $KE= \sqrt{BC∙AD}$;

 B C

 K E

A D

Обозначим длину отрезка *KE* буквой *g.*

$g=\sqrt{ab}.$

1. **Среднее квадратичное в трапеции.**

Если в трапеции длины оснований равны $a$ и $b$, то длина отрезка, параллельного её основаниям, концы которого лежат на боковых сторонах, равна среднему квадратичному чисел $a$ и $b$, при условии, что он делит трапецию на две трапеции равной площади.

 Р

 $S\_{0}$

 B C

 $S$

 F G

 $S$

A D

Рассмотрим доказательство этого свойства. Отрезок *FG* делит трапецию *ABCD* на две равновеликие трапеции. P – точка пересечения боковых сторон трапеции. Тогда треугольники *BPC, FPG* и *APD* подобны. Обозначим буквой $S\_{0}$ площадь треугольника *BPC,* а буквой *S* площади равновеликих трапеций *FBCG* и *AFGD.* Так как отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, то можно получить следующие отношения:

 $\frac{S\_{0}+S}{S\_{0}}=\left(\frac{FG}{a}\right)^{2}$; $\frac{S\_{0}+2S}{S\_{0}}= \left(\frac{b}{a}\right)^{2}$ .

 Вычтем из удвоенного первого равенства второе и получим: $1=2\left(\frac{FG}{a}\right)^{2}- \left(\frac{b}{a}\right)^{2}$*;* $a^{2 }=2FG^{2}- b^{2}$*;*

$FG^{2}= \frac{a^{2}+ b^{2}}{2}$.

 Обозначим длину отрезка *FG* буквой *s.*

$s= \sqrt{\frac{a^{2}+ b^{2}}{2}}$.

1. **Среднее гармоническое в трапеции.**

Пожалуй, самым красивым из свойств отрезков, параллельных основаниям трапеции, является свойство отрезка, проходящего через точку пересечения диагоналей трапеции. Длина такого отрезка равна среднему гармоническому длин оснований трапеции.

 В C

 T O L

 A D

На рисунке *О* – точка пересечения диагоналей, *TL –* отрезок, параллельный основаниям трапеции, проходящий через точку *O*, концы которого лежат на боковых сторонах. Для доказательства рассмотрим четыре пары подобных треугольников. Треугольники *TBO* и *ABD* подобны, значит, $\frac{TO}{b}= \frac{BO}{BD}$ ; треугольники *OCL* и *ACD* подобны, значит, $\frac{OL}{b}= \frac{OC}{AC}$ ; треугольники *ODC* и *BDC* подобны, значит, $\frac{OL}{a}= \frac{OD}{BD}$ ; треугольники *TAO* и *BOC* подобны, значит, $\frac{TO}{a}= \frac{AO}{AC}$. Сложим все четыре равенства:

$\frac{TO}{b}+ \frac{OL}{b}+ \frac{TO}{a}+ \frac{OL}{a}= \frac{BO}{BD}+ \frac{OC}{AC}+ \frac{AO}{AC}+ \frac{OD}{BD}$ ;

Упростим:

$\frac{TL}{b}+ \frac{TL}{a}= \frac{BD}{BD}+ \frac{AC}{AC}$ ;

$TL\left(\frac{1}{b}+ \frac{1}{a}\right)=2$ *;* $TL= \frac{2ab}{a+b}$ *.*

Обозначим длину отрезка $TL$ буквой *h.*

$h= \frac{2ab}{a+b}$***.***

1. **Неравенство о средних в трапеции.**

Можно показать, что средние значения удовлетворяют неравенствам.

$\frac{2ab}{a+b}\leq $ $\sqrt{ab} \leq $ $\frac{a+b}{2}\leq $ $\sqrt{\frac{a^{2}+b^{2}}{2}}$ , или $h\leq g\leq m\leq s,$ причём знак равенства достигается лишь в случае $a=b.$ Трапеция позволяет наглядно сравнить средние величины и убедиться в выполнении этих неравенств.

h

 g

 m

 s

1. **Где ещё встречаются средние значения.**

В этом году при изучении числовых последовательностей мне было нетрудно понять, откуда появились названия «арифметическая прогрессия» и «геометрическая прогрессия». В арифметической прогрессии каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов. В геометрической прогрессии – среднему геометрическому соседних членов. Таким образом, свойства, рассмотренные во втором и третьем параграфах, можно переформулировать.

Длины оснований трапеции и длина её средней линии являются членами арифметической прогрессии.

Длины оснований трапеции и длина отрезка, параллельного основаниям, делящего трапецию на две подобные трапеции, являются членами геометрической прогрессии.

Мне хотелось также узнать, рассматриваются ли в математике последовательности, каждый член которых, начиная со второго, равен среднему гармоническому соседних членов. Рассмотрение таких последовательностей в общем виде я не обнаружила. Но одна конкретная последовательность, обладающая таким свойством, рассматривается в математике достаточно часто. Это последовательность чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, …, \frac{1}{n}, …$ Составленный из членов этой последовательности ряд 1+ $\frac{1}{2}+ \frac{1}{3}+ \frac{1}{4}+ \frac{1}{5}+…+ \frac{1}{n}+ …$, называется гармоническим рядом.

Откуда взялось это название? Числовые средние были известны ещё античным математикам. Пифагор, создавая учение о музыке, рассматривал отношения между числами. Звуковые интервалы, связанные средним гармоническим отношением, были приятны и благозвучны.

И сейчас, когда я всматриваюсь в рисунок, где изображён отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, мне кажется, что я слышу гармоничные и чарующие звуки.

**Заключение**

Выполняя научно исследовательскую работу, я узнала новые для меня факты и понятия из алгебры (среднее гармоническое, среднее квадратичное, неравенство о средних). Кроме того, я смогла улучшить свои навыки в решении геометрических задач на доказательство, навыки, необходимые мне в этом году для сдачи экзамена по математике.

Подведу итоги своей работы.

1. В школьном курсе понятия среднего арифметического и среднего геометрического изучается разрозненно. Задачи на вычисление среднего гармонического встречаются в алгебре, но само понятие среднего гармонического не вводится. В моей работе систематизированы понятия числовых средних.
2. Безусловно, основная часть исследования, связана с поиском доказательства свойств отрезков трапеции. Доказательства были мною выполнены самостоятельно. Они приведены в моей работе.
3. Два последних свойства отрезков трапеции, рассмотренные в моей работе, встречаются в тренировочных вариантах для подготовки к Единому Государственному экзамену. Первое свойство – классическая теорема из школьного учебника. В моей работе предложена идея объединения этих задач с помощью понятия числовых средних. И хотя эта идея не моя, я попыталась изложить её доступно для школьников.
4. Геометрическая интерпретация, позволяющая наглядно увидеть числовые средние и расположить их в порядке возрастания, также придумана не мной, но была мною изображена в презентации и доведена до сведения не только моих одноклассников, но и учеников старших классов.
5. Моё исследование способствовало расширению моих представлений о гармонии. Мне хотелось бы передать своим читателям и слушателям то чувство прекрасного, которое я испытывала в процессе работы.

 Предполагаю и в дальнейшем решать подобные задачи, которые считаются «жемчужинами» необычайно красивой науки – геометрии.

**Библиография.**

1. Атанасян Л. С., Геометрия. 7 – 9 классы: учебник для общеобразоват. учреждений/ Л. С. Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.:Просвещение, 2013.
2. Акимова С. Занимательная математика. – Санкт – Петербург, Тригон, 1997.
3. Гольдман А., Звавич Л., Числовые средние и геометрия/ Гольдман А., Звавич Л.//Квант. – 1990. - №9. – С. 62 – 64.
4. Гордин Р. К. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С4/Под ред. А.Л.Семёнова и И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010.
5. Кудрявцев Л.Д., Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и втузов. /Л. Д. Кудрявцев. – М.: Высшая школа, 1981.
6. Пиголкина Т., Средние значения/ Пиголкина Т.//Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика – М.: Аванта+ - 2002. – С. 143 – 145.
7. Погорелов А. В., Геометрия. 7 – 9 классы: учеб.для общеобразоват. организаций/ А. В. Погорелов. – 2-е изд. – М.:Просвещение, 2014.
1. (1. С.147) [↑](#footnote-ref-2)
2. (3.С.63) [↑](#footnote-ref-3)