Проект «Подготовка к ЕГЭ».

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| «Теория вероятности».  Люсова Алёна 11Б МОУ «СОШ№84»  Руководитель Зарьянцева Виктория Павловна-учитель математики высшей категорииМОУ «СОШ№84»  Введение  Теория вероятностей на ЕГЭ — это очень простые задачи под номером В4. С ними справится каждый. Ведь для решения задачи B4 в варианте ЕГЭ понадобятся лишь самые **основные понятия теории вероятностей**.  **Случайным называется событие, которое нельзя точно предсказать заранее. Оно может либо произойти, либо нет.**  Вы выиграли в лотерею — случайное событие. Пригласили друзей отпраздновать выигрыш, а они по дороге к вам застряли в лифте — тоже случайное событие. Правда, мастер оказался поблизости и освободил всю компанию через десять минут — и это тоже можно считать счастливой случайностью…Наша жизнь полна случайных событий. О каждом из них можно сказать, что оно произойдет с некоторой вероятностью. Скорее всего, вы интуитивно знакомы с этим понятием. Теперь мы дадим математическое определение вероятности.  **Определение вероятности события.**  **Начнем с самого простого примера**. Вы бросаете монетку. Орел или решка?  Такое действие, которое может привести к одному из нескольких результатов, в теории вероятностей называют испытанием.  Орел и решка — два возможных исхода испытания.  Орел выпадет в одном случае из двух возможных. Говорят, что вероятность того, что монетка упадет орлом, равна 1/2.  **Бросим игральную кость**. У кубика шесть граней, поэтому возможных исходов тоже шесть.  Например, вы загадали, что выпадет три очка. Это один исход из шести возможных. В теории вероятностей он будет называться благоприятным исходом.  Вероятность выпадения тройки равна 1/6 (один благоприятный исход из шести возможных).  Вероятность четверки — тоже 1/6 А вот вероятность появления семерки равна нулю. Ведь грани с семью точками на кубике нет.  **Вероятность события равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов.**  Очевидно, что вероятность не может быть больше единицы.  Вот другой пример. В пакете 25 яблок, из них 8 — красные, остальные — зеленые. Ни формой, ни размером яблоки не отличаются. Вы запускаете в пакет руку и наугад вынимаете яблоко. Вероятность вытащить красное яблоко равна 8/25, а зеленое — 17/25.  Вероятность достать красное или зеленое яблоко равна 8/25 + 17/25 = 1.  **Разберем задачи по теории вероятностей, входящие в сборники для подготовки к ЕГЭ.**  *1. В фирме такси в данный момент свободно 15 машин: 2 красных, 9 желтых и 4 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшихся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет желтое такси.*  Всего имеется 15 машин, то есть к заказчице приедет одна из пятнадцати. Желтых — девять, и значит, вероятность приезда именно желтой машины равна 9/15, то есть 0,6.  *2. (Демо-вариант 2012) В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.*  Очевидно, вероятность вытащить билет без вопроса о грибах равна 23/25, то есть 0,92.  *3. Родительский комитет закупил 30 пазлов для подарков детям на окончание учебного года, из них 12 с картинами известных художников и 18 с изображениями животных. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Вовочке достанется пазл с животным.*  Задача решается аналогично.  Ответ: 0,6.  *4. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая последней, окажется из Китая.*  Давайте представим, что все спортсменки одновременно подошли к шляпе и вытянули из нее бумажки с номерами. Кому-то из них достанется двадцатый номер. Вероятность того, что его вытянет китайская спортсменка, равен 5/20 (поскольку из Китая — 5 спортсменок). Ответ: 0,25.  *5. Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет число кратное пяти?*  1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11... 100  Каждое пятое число из данного множества делится на 5. Значит, вероятность равна 1/5.  *6. Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет нечетное число очков.*  1, 3, 5 — нечетные числа; 2, 4, 6 — четные. Вероятность нечетного числа очков равна 1/2.  Ответ: 0,5.  *7. Монета брошена три раза. Какова вероятность двух «орлов» и одной «решки»?*  Заметим, что задачу можно сформулировать по-другому: бросили три монеты одновременно. На решение это не повлияет.  Как вы думаете, сколько здесь возможных исходов?  Бросаем монету. У этого действия два возможных исхода: орел и решка Две монеты — уже четыре исхода:   |  |  | | --- | --- | | орёл | орёл | | орёл | решка | | решка | орёл | | решка | решка |   Три монеты? Правильно, 8 исходов, так как 2 *2 *2 = 2³ = 8.  Вот они:   |  |  |  | | --- | --- | --- | | орел | орел | орел | | орел | орел | решка | | орел | решка | орел | | решка | орел | орел | | орел | решка | решка | | решка | орел | решка | | решка | решка | орел | | решка | решка | решка |   Два орла и одна решка выпадают в трех случаях из восьми.  Ответ: 3/8.  *8. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.*  Бросаем первую кость — шесть исходов. И для каждого из них возможны еще шесть — когда мы бросаем вторую кость.  Получаем, что у данного действия — бросания двух игральных костей — всего 36 возможных исходов, так как 6² = 36.  А теперь — благоприятные исходы:  2 6 3 5 4 4  5 3  6 2  Вероятность выпадения восьми очков равна 5/36 ≈ 0,14.  *9. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,9. Найдите вероятность того, что он попадёт в цель четыре раза выстрела подряд.*  Если вероятность попадания равна 0,9 — следовательно, вероятность промаха 0,1. Рассуждаем так же, как и в предыдущей задаче. Вероятность двух попадания подряд равна 0,9 *0,9 = 0,81. А вероятность четырех попаданий подряд равна  0,9 *0,9 *0,9 *0,9 = 0,6561.  Внимание! Самая важная информация. В банке заданий ФИПИ пока содержится только шесть прототипов задач по теории вероятностей. Еще одна задача — в Демо-варианте 2012 года. Очевидно, задач по теории вероятностей на ЕГЭ будет больше. Заходите чаще на наш сайт. Мы будем отслеживать все изменения и добавлять новые типы задач по теории вероятностей. |

Задачи на вероятность спортивного характера.

**№ 1.** В соревнованиях по толканию ядра участвуют 9 спортсменов из Дании, 3 спортсмена из Швеции, 8 спортсменов из Норвегии и 5 — из Финляндии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Финляндии.

А) 0,2; Б) 20%; В)

**Решение.**   
Всего участвует 9+3+8+5=25 спортсменов.

А т.к. финнов 5 человек, то вероятность того, что на последнем месте будет спортсмен из Финляндии 5/25 = 1/5=**0,2**

**№ 2.** В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Македонии, 9 спортсменов из Сербии, 7 спортсменов из Хорватии и 5 — из Словении. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Македонии.

А) 16%; Б) 0,2; В) 0,16

**Решение.**   
Всего участвует 4+9+7+5=25 спортсменов.

А т.к. македонцев 4 человека, то вероятность того, что на последнем месте будет спортсмен из Македонии 4/25 = **0,16**

**№ 3.** В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 22 из Великобритании, 19 из Франции, остальные — из Германии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Германии.

А) 0,11; Б) 0,18; В) 11%

**Решение.**   
50-(22+19)= 9

Р=9/50=**0,18**

**№ 4.**В чемпионате по гимнастике участвуют 24 спортсменки: 9 из России, 6 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

**Решение.**   
24-(9+6)= 9

Р= 9/24=**0,375**

**Задачи на определение вероятности.**

**№5.** Конкурс исполнителей длится 3 дня. Всего заявлено 40 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день запланировано 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса.

**Решение:** Всего 40 возможных исходов. Благоприятен исход, когда россиянин займет одну из 10 позиций в списке выступающих третьего дня конкурса.   
Вероятность находим, как отношение благоприятных исходов эксперимента 10 к числу всех возможных исходов 40.   
2) 10/40 = 0,25

**№ 6.**В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 12 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

А) 99,9%; Б) 0,999; В) 1

**Решение.**

2000-12=1988 -не  подтекают

Р=1998/2000 = **0,999**

**№ 7.**В среднем из 1500 садовых насосов, поступивших в продажу, 3 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

А) 0,998; Б) 99,8%; В) 1

**Решение.**

1500-3=1497

Р=1497/1500=**0,998**

**№8.**Фабрика выпускает сумки. В среднем **на 180  сумок** приходится **восемь сумок со скрытыми дефектами.** Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

А) 96%; Б) 0,96; В) 0,95.

**Решение.**

180-8 = 172 сумки качественные.

172 / 180 = 0,955...≈ **0,96**

**№ 9.** Фабрика выпускает сумки. В среднем на **170 качественных сумо**к приходится **шесть сумок со скрытыми дефектами**. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

А) 0,97; Б) 0,96; В) 97%.

**Решение.** 170 + 6 = 176 - всего сумок.

170 / 176 = 0,965≈ **0,97**

**Задачи на игральные кости**

**№ 10.** В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

**Решение.**

На первом кубике может выпасть  1, 2, 3, 4, 5 или  6 очков. Каждому варианту выпадения очков соответствует 6 вариантов выпадения очков на втором кубике.

Т.е. всего различных вариантов 6\*6 = 36.

Варианты (исходы эксперимента) будут такие:

1;1  1;2  1;3  1;4  1;5  1;6

2;1  2;2  2;3  2;4  2;5  2;6

и т.д. ..............................

6;1  6;2  6;3  6;4  6;5  6;6

Подсчитаем количество исходов (вариантов), в которых сумма очков двух кубиков равна 8.

2;6   3;5;  4;4   5;3  6;2     Всего 5 вариантов.

Найдем вероятность.   5/36 = 0,138 ≈ **0,14**

**№ 11.** В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 14 очков. Результат округлите до сотых.

**Решение.**

Всего различных вариантов выпадения очков будет 6\*6\*6 = 216

Подсчитаем количество благоприятных исходов, т.е. вариантов, в которых сумма трех кубиков равнялась 14.

6;6;2   6;2;6   2;6;6

5;5;4   5;4;5   4;5;5

4;4;6   4;6;4   6;4;4

6;5;3   6;3;5   5;6;3   5;3;6   3;5;6   3;6;5

Всего 15 благоприятных исходов

Вероятность равна 15/216 = 0,06944... ≈ **0,07**

**№12**. Игральный кубик подбрасывают дважды. Определите вероятность того, что при двух бросках выпадет разное количество очков. Результат округлите до сотых.

**Решение:** Всего возможных комбинаций при вбрасывании двух кубиков: 6 \* 6 = 36.  
  
Число неблагоприятных для нас исходов:   
выпадет одинаковое число очков 1 и 1, 2 и 2, 3 и 3, 4 и 4, 5 и 5, 6 и 6.   
Таких неблагоприятных исходов 6.   
Тогда благоприятных исходов 36 – 6 = 30.  
Итак, всего благоприятных исходов 30.  
Найдем отношение   
30/36 = 0,83333…   
Ответ. 0,83

**Задачи на симметричные монеты**

**№13.** Дважды бросают симметричную монету. Найдем вероятность того, что оба раза выпала одна сторона.

**Решение:** Обозначим выпадение орла буквой О, а решки — буквой Р.  
Выпишем все элементарные события: ОО, ОР, РО и РР.  
Всего элементарных событий четыре. Так как монета симметричная, эти события равновозможны. Из них нас интересуют ровно два события ОО и РР.   
Всего возможных исходов 4.  
Благоприятных иcходов – 2.  
Вероятность 2/4 = 0,5.

**№14.** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

**Решение:** Какие возможны исходы трех бросаний монеты?  
1) Решка, решка, решка.  
2) Решка, решка, орел.  
3) Решка, орел, решка.  
4) Орел, решка, решка.  
5) Решка, орел, орел.  
6) Орел, решка, орел.  
7) Орел, орел, решка.  
8) Орел, орел, орел.  
Это все возможные события, других нет. Нас интересует вероятность 1-го события.   
Всего возможных исходов 8.  
Благоприятных иcходов – 1. Отношение 1/8 = 0,125.  
  
  
Другой способ.  
Условие можно толковать так: какова вероятность, что все 3 раза выпадет решка.  
Вероятность того, что решка выпадет 1 раз равна 1/2,   
2 раза равна 1/2⋅1/2=1/4,   
3 раза равна 1/2⋅1/2⋅1/2=1/8,   
(1/2)3=1/8=0,125.

**№15** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет все три раза.

**Решение.**

Количество различных вариантов типа орел, решка, решка будет 2\*2\*2 = 8

Благоприятный вариант 1.   Вероятность равна 1/8 = **0,125**

**№16.**В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.

**Решение.**

Всего вариантов 2\*2\*2=8. Благоприятных - 3 варианта:

**о; о; р       о; р; о   р; о; о**

Вероятность равна **3/8 = 0,375**

**№ 17.**В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

**Решение.**

Варианты:  о;о    о;р    р;о    р;р.    всего **4 варианта**.

**Благоприятных 2**:   о;р  и р;о.   Вероятность равна **2/4 = 0,5**

**№ 18.**В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

**Решение:**

Всего вариантов  2\*2\*2\*2 = **16**

Орел не выпадет ни разу - это **1 вариант.    Вероятность 1/16.**

**Разные задачи.**

На турнир по шахматам прибыло 26 участников в том числе Коля и Толя. Для проведения жеребьевки первого тура участников случайным образом разбили на две группы по 13 человек. Найти вероятность того, что КОля и Толя попадут в разные группы

**1)** Если во время жеребьевки каждый участник получал только номер группы, то задача решается просто.

Всего исходов для Коли и Толи четыре:  1-1, 1-2, 2-1, 2-2, а благоприятных два: 1-2 и 2-1.

**Р = 2/4 = 0,5**.

**2)** Если же каждый участник получал порядковый номер (1-26), то задача решается по-другому.

Подсчитаем количество всевозможных пар, полученных номеров. Коля имеет 26 вариантов получения номера, тогда у Толи 25 вариантов.  Всего образованных пар чисел буде 26\*25 = **650**.

Подсчитаем количество благоприятных вариантов.

**26** вариантов у Коли и **13** вариантов на каждый Колин вариант - у Толи.

Всего 26\*13 = 338.

**Р =** 26\*13 / (26\*25) = **0,52**

**№19**. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда "Б" играет по очереди с командами "К", "С", "З". Найти вероятность того, что ровно в одном матче право владеть мячом получит команда "Б".

**Решение:** Рассмотрим 3 независимых испытания.

Испытание А состоит в том, чтобы команда "Б" владела мячом в 1-й игре, испытание В - во второй, С - в третьей.

Вероятность Р(А)= 1/2. Вероятность противоположного события (Не владела мячом) равна  также 1/2.

Аналогично для испытаний В и С.

Благоприятные исходы: 1) в первой игре владеет, а во второй и третьей не владеет мячом.

Р=1/2 \*1/2 \* 1/2 = 1/8.

  2) в первой не владеет, во второй владеет, в третьей – не владеет. Р=1/8.

3) в первой и второй играх не владеет, а в третьей - владеет. Р=1/8.

Р = 1/8 + 1/8 + 1/8 = **3/8**

 2-й способ.

В каждой игре 2 исхода (например 0- не владеет и 1- владеет). Игр -3. Количество всевозможных сочетаний типа 000, 001, ..., 111 равно 23 =8).

Количество благоприятных исходов - 3 :  100, 010, 001.

**Р = 3/8**

**Благоприятных исходов 3.**

Команда только в одном матче должна владеть мячом:

* в первом владеть, во втором и третьем - нет.
* во втором владеть, в первом и третьем нет.
* в третьем владеть, а в первом и втором нет.

Всего исходов  23 =8.

**№ 20**.Галя дважды бросает игральный кубик. В сумме у неё выпало 9 очков. Найдите вероятность того, что при втором броске выпало 6 очков.

**Решение:**

Если в сумме выпало 9 очков, то варианты такие:  4 5,  5 4,  6 3,  3 6.

Всего 4 варианта. Благоприятный из них - один:  **3- 6 (при втором броске выпало 6)**

Р = 1/4 = **0,25**

**№ 21**.В урне находится 6 шаров: 1 белый, 2 красных и 3 черных. Наугад вытаскивают 3 шара.

Какова вероятность того, что среди вытащенных шаров ровно 1 будет черным?

**Решение.**Число сочетаний С(6,3)=6!/(3!\*3!)= **20** - всех исходов.

Благоприятные исходы - выбор 3 шаров, среди которых только 1 черный:

1) черный, белый, красный . Таких исходов 3\*1\*2 = **6**

2) черный, красный, красный. Таких исходов **3** (черный выбираем тремя способами).

Далее (3 + 6)/20 = **0, 45.**

**Пусть *А —* случайное событие, которое в результате опыта может наступить или не наступить. Обозначим через *п* число опытов, проходящих в одинаковых условиях.**

## Пусть n(A)—число тех опытов, в которых наступило собы­тие *А.* Отношение n(A)/n называется *частотой события А* в данной серии опытов.

## Задание B10 (№ 321267) В некотором городе из 3000 появившихся на свет младенцев 1590 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

## Решение. Искомая частота равна .

## Ответ. 0,53.

## Задание B10 (№ 321681) Вероятность того, что новый ноутбук в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,072. В некотором городе из 1000 проданных ноутбуков в течение года в гарантийную мастерскую поступило 76 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

## Решение. Частота события «гарантийный ремонт» равна , а значит, искомая величина равна 0,076 – 0,072=0,004.

## Ответ. 0,004.

**Рассмот­рим опыт, имеющий конечное число равновозможных исходов, которые мы обозначим U1, U2,…, Un. Предположим, что в каж­дом опыте наступает один и только один исход. Про такие исхо­ды говорят, что они *не пересекаются.***

**Пусть A — некоторое событие, связанное с данным опытом, которое в результате этого опыта может наступить или не насту­пить. Мы назовем исход Uk благоприятным событию A, если его наступление в результате опыта приводит к наступлению собы­тия A. Обозначим через n(А) число исходов, благоприятных со­бытию A. В этом случае вероятность определяется по следующей простой формуле:**



**Такой подход к определению вероятности события называется *классическим.***

**Рассмотрим задания из базы ЕГЭ.**

## Задание B10 (№ 320925) Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 60 до 74 делится на 6?

## Решение. Опыт состоит в выборке одного из имеющихся чисел. Построим множество исходов рассматриваемого опыта.

U1={выбрано натуральное число 60},

U2={ выбрано натуральное число 61},

U3={ выбрано натуральное число 62},

U4={ выбрано натуральное число 63},

………………………………………………

………………………………………………

U11={ выбрано натуральное число 70},

U12={ выбрано натуральное число 71},

U13={ выбрано натуральное число 72},

U14={ выбрано натуральное число 73},

U15={ выбрано натуральное число 74},

Таким образом, множество исходов рассматриваемого опыта состоит из пятнадцати элементов: U1*,* U2, U3*,…*,U13, U14*,* U15. Можно найти общее число исходов, не перечисляя их, для этого достаточно найти значение числового выражения 74-60+1. «Случайно выбранное натуральное число» означает равновозможность всех исходов данного опыта.

Поскольку, среди натуральных чисел от 60 до 74, лишь числа 60, 60+6=66, 66+6=72 кратны 6, то событию A - «выбранное число делится на 6» благоприятствуют 3 исхода. Поэтому, согласно классическому подходу к определению вероятности, искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию A, к числу всевозможных исходов, то есть .

Ответ. 0,2.

## Задание B10 (№ 320831) Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 55% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 5% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

## Решение: Пусть агрофирма закупила x куриных яиц у первого домашнего хозяйства и y куриных яиц – у второго, тогда среди купленных куриных яиц у первого и второго домашних хозяйств оказалось 0,55x и 0,05y яиц высшей категории соответственно. По условию задачи 35% куриных яиц агрофирмы – яйца высшей категории. Составим уравнение . Полученное линейное уравнение двух переменных, к сожалению, не позволит найти значения переменных, в лучшем случае мы сможем с его помощью установить зависимость между переменными x и y. Поэтому обратимся к вопросу задачи, чтобы понять, что нужно знать для ответа на этот вопрос. Для нахождения вероятности события A - «купленное у агрофирмы куриное яйцо – яйцо из первого хозяйства» - нужно знать общее число куриных яиц у агрофирмы, в нашем случае – (x+y), а также число куриных яиц, закупленных у первого домашнего хозяйства, в нашем случае - x. Таким образом, в соответствии с классическим подходом к определению вероятности, ответом на вопрос задачи будет значение выражения . Из уравнения следует, что . Подставляя в выражение вместо переменной y выражение , получаем . Итак, искомая вероятность равна 0,6.

## Ответ. 0,6.

## Задание B10 (№ 286229) Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 6 участников из России, в том числе Никита Литвинов. Найдите вероятность того, что в первом туре Никита Литвинов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

## Решение. Опыт состоит в выборе соперника Никиты Литвинова. Так как по условию задачи Никита входит в общее число участников соревнований, а также, в число участников из России, то его соперником может стать один из 25 оставшихся участников турнира, среди которых 5 участников из России (реально Никита сам с собой играть не может). Поэтому вероятность того, что в первом туре соперником Никиты Литвинова будет бадминтонист из России, равна частному от деления числа 5 (число соперников Никиты из России) на число 25 (общее число соперников Никиты) и равна 0,2.

## Ответ. 0,2.

## Задание B10 (№ 319397) Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45\% этих стекол, вторая — 55\%. Первая фабрика выпускает 3\% бракованных стекол, а вторая — 5\%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

## Решение. Опыт состоит в приобретении одного стекла. Обозначим через N количество стёкол выпущенных обеими фабриками. Тогда количество стёкол выпущенных первой фабрикой равно 0,45N, а количество стёкол изготовленных второй фабрикой равно 0,55N. По условию задачи первая фабрика выпускает 3% бракованных стёкол, а вторая – 5%, поэтому количества выпущенных бракованных стёкол первой и второй фабриками равны 0,030,45N и 0,050,55N соответственно. Утверждение: «случайно купленное в магазине стекло» означает, что все исходы рассматриваемого опыта равновозможны. А значит, искомая вероятность равна частному от деления числа 0,030,45N+0,050,55N исходов благоприятствующих событию F – «куплено бракованное стекло» к числу N всевозможных исходов, то есть .

## Ответ. 0,041.

## Иной способ решения подобной задачи см. ниже.

## Прототип задания B10 (№ 320200) На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Решение. Опыт состоит в приобретении тарелки. Общее число исходов равно количеству поступивших в продажу тарелок, а число благоприятных исходов равно количеству бракованных тарелок, оказавшихся в продаже. Обозначим через N общее количество тарелок, которые произвёл завод. Согласно условию задачи, в продажу поступят все качественные тарелки - это 0,9N штук и 20% не выявленных дефектных тарелок - это 0,20,1N штук, то есть в магазин поступит 0,9N + 0,20,1N = 0,92N тарелок. «Случайно выбранная тарелка» означает, что все исходы этого опыта равновозможны. Поскольку качественных тарелок 0,9N штук, то искомая вероятность равна: . Округляем до сотых, получаем 0,98.

Ответ. 0,98.

## Задачи из базы ЕГЭ.

## Задание B10 (№ 322405) В кармане у Саши было четыре конфеты — «Маска», «Василёк», «Взлётная» и «Коровка», а так же ключи от квартиры. Вынимая ключи, Саша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Василёк».

## Прототип задания B10 (№ 320200) На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

## Задание B10 (№ 321393) На олимпиаде по химии участников рассаживают по трём аудиториям. В первых двух по 140 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчёте выяснилось, что всего было 400 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

## Прототип задания B10 (№ 320193) В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них чёрные с жёлтыми надписями на бортах, остальные  — жёлтые с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

## Задание B10 (№ 321503) В группе туристов 24 человека. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 3 человека за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист З. полетит первым рейсом вертолёта.

## Задание B10 (№ 321297) На борту самолёта 23 мест рядом с запасными выходами и 25 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир З. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру З. достанется удобное место, если всего в самолёте 100 мест.

## Задание B10 (№ 321007) В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают четырёх человек, которые должны идти в село за продуктами. Турист Г. хотел бы сходить в магазин, но он подчиняется жребию. Какова вероятность того, что Г. пойдёт в магазин?

## Задание B10 (№ 321053) В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОРР (в первый раз выпадает орёл, во второй и третий — решка).

## Задание B10 (№ 315949) В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

## Задание B10 (№ 283459) В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 9 очков. Результат округлите до сотых.

## Задание B10 (№ 320851) На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет больше 2, но меньше 7?

## Задание B10 (№ 320375) В чемпионате мира участвуют 12 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по три команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Канады окажется в третьей группе?

## Задание B10 (№ 286373) В сборнике билетов по физике всего 20 билетов, в 8 из них встречается вопрос по оптике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по оптике.

## Задание B10 (№ 286473) На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них 7 прыгунов из Голландии и 2 прыгуна из Боливии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что первым будет выступать прыгун из Боливии.

## Задание B10 (№ 320335) Марина, Катя, Вова, Лена, Миша, Артур, Ваня и Сеня бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Ваня.

## Задание B10 (№ 286025) Научная конференция проводится в 3 дня. Всего запланировано 50 докладов — в первый день 16 докладов, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

## Задание B10 (№ 286113) Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 75 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 27 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

## Задание B10 (№ 286199) На семинар приехали 6 ученых из Великобритании, 7 из Хорватии и 2 из Норвегии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что первым окажется доклад ученого из Великобритании.

## Задание B10 (№ 286303) В сборнике билетов по химии всего 15 билетов, в 6 из них встречается вопрос по солям. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по солям.

## Задание B10 (№ 283571) В чемпионате по гимнастике участвуют 40 спортсменок: 12 из Великобритании, 16 из Франции, остальные — из Германии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Германии.

## Задание B10 (№ 283619) В среднем из 500 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

## Задание B10 (№ 283717) Фабрика выпускает сумки. В среднем на 180 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

## Задание B10 (№ 283819) В соревнованиях по толканию ядра участвуют 7 спортсменов из Греции, 8 спортсменов из Болгарии, 7 спортсменов из Румынии и 10 — из Венгрии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Болгарии.

**Определение. Вероятностным пространством называ­ется любое конечное множество U={U1, U2, U3, *...,* Un}, каждо­му элементу Uk, которого поставлено в соответствие неотрица­тельное число Рk, 0≤Pk≤1, называемое его вероятностью. При этом сумма чисел Рk, k *=* 1, 2, *...,*n, равна единице: P1+P2+P3+…+Pn=1.**

Элементы U1, U2, U3, *...,* Un множества U называются исходами, а множество U *—* множеством исходов.

**Замечание. Из определения следует, что исходы U1, U2, U3, *...,* Un множества U попарно не пересекаются, то есть появление одного из них исключает появление других, и в результате опыта один из этих исходов обязательно произойдёт.**

После того как мы описали вероятностное пространство, пе­рейдем к описанию событий. В связи с этим введем следующее определение:

**Определение. *Событием А* в данном опыте называется любое подмножество *Х* множества исходов *U. Вероятностью со­бытия А* назовем сумму вероятностей исходов, принадлежащих множеству *X.* Каждый исход, входящий в подмножество *X,* назы­вается *исходом, благоприятствующим событию A.***

**Если событие A таково, что подмножество *Х* совпадает с мно­жеством исходов *U,* то есть**

***Х = U,* то P(A)=P(U1)+P(U2)+...+P(Un)=1 и событие A называют достоверным; если же *Х —* пустое множе­ство, т. е. Х=∅, то Р(A)=0 и событие A называют не­возможным.**

**Рассмотрим пример.** Изучим распределение мальчиков и девочек в семьях, имеющих трех детей.

Будем считать, что все дети имеют разный возраст (нет близ­нецов) и что вероятность рождения мальчиков и девочек одинакова и равна 1/2.

Рассмотрим опыт: выбрана семья, имеющая трех разновозра­стных детей. Построим вероятностное пространство этого опыта. Будем буквой М обозначать мальчика, а буквой Д — девочку.

Совпадение вероятностей Р(М)=Р(Д)=1/2 обеспечивает равно­вероятность всех исходов нашего опыта.

Дерево исходов этого опыта имеет вид, изображенный на ри­сунке.

**Третий ребёнок**

**Второй ребёнок**

Мальчик (МММ)=U1

**Первый ребёнок**  Мальчик

Девочка (ММД)=U2

Мальчик Мальчик (МДМ)=U3

Девочка

Девочка (МДД)=U4

Мальчик (ДММ)=U5

Мальчик

Девочка (ДМД)=U6

Девочка Мальчик (ДДМ)=U7

Девочка

Девочка (ДДД)=U8

Множество всех равновероятных исходов нашего опыта U={U1, U2,  U3, U4, U5, U6, U7, U8}.

Вероятность каждого исхода равна 1/8. Запишем исходы и их вероятности:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Исходы | U1 | U2 | U3 | U4 | U5 | U6 | U7 | U8 |
| Вероятности | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | l/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 |

Сумма вероятностей исходов P(U1)+P(U2)+P(U3)+P(U4)+P(U5)+P(U6)+P(U7)+P(U8)=(1/8)•8=1, и поэтому эта таблица задает вероятностное пространство нашего опыта. Рассмотрим некоторое событие *А,* связанное с рассматриваемым опытом. Пусть, например, событие *А —* «в семье есть дети обоих по­лов». Событие *А* совпадает с подмножеством {U2,  U3, U4, U5, U6, U7}, множества исходов, и поэтому

P(A)=P(U2)+P(U3)+P(U4)+P(U5)+P(U6)+P(U7)=(1/8)•6=3/4.

Другое событие, связанное с этим опытом, событие В *—* «в семье есть по крайней мере одна девочка». Это событие совпадает с подмножеством {U2,  U3, U4, U5, U6, U7, U8}, и его вероятность

P(B)=P(U2)+P(U3)+P(U4)+P(U5)+P(U6)+P(U7)+P(U8)=(1/8)•7=7/8.

Обратим внимание на то, что с изучаемым опытом обычно связа­но несколько вероятностных пространств.

Рассмотрим другие исходы нашего опыта, отличные от исходов полу­ченных выше.

Пусть исход V1 *—* «в семье три мальчика», V2 *—* «в семье два мальчика и одна девочка», V3— «в семье один мальчик и две де­вочки» и исход V4 — « в семье три девочки». Исходы V1, V2, V3 и V4 взаимно исключают друг друга, и в результате опыта один из них обязательно произойдет. Однако эти исходы равноверо­ятными уже не являются. Действительно, анализируя дере­во исходов, изображенное на рисунке, убеждаемся, что исход V1 совпадает с исходом U1 и поэтому Р(V1)=1/8; исход V4 совпадает с исходом U8 и поэтому P(V4)*=*1/8*.* Исход V2 наступает тогда, когда наступают исходы U2*,* U3, U5, и поэтому P(V2)=3/8*.* Анало­гично Р(V3)=3/8. Теперь имеем:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Исходы | V1 | V2 | V3 | V4 |
| Вероятности | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

Т а б л и ц а 2

Поскольку сумма вероятностей равна единице:

P(V1)+P(V2)+P(V3)+P(V4)=1, то таблица 2 задает другое вероятностное пространство нашего опыта и исходы V1, V1, V3 и V4 образуют множество его исходов

V={V1, V1, V3, V4}.

В построенном пространстве рассмотрим событие *А —* «в семье не более одного мальчика». Это событие совпадет с под­множеством {V3, V4}, и поэтому

Р(A)=Р(V3)+Р(V4)=(3/8)+(1/8)=1/2.

Вопрос о том, какое из вероятностных пространств рассматри­вать, требует тщательного анализа, как условий задачи, так и условий опыта.

В заключение вернемся к вероятностному пространству, за­данному таблицей 2.

Практический смысл этой таблицы состоит в том, что в боль­шой группе, содержащей *N* трехдетных семей, примерно (1/4)*N* семей будет иметь детей одного пола, а (3/4)*N* семей — детей разного пола. Это должны учитывать, например, архитекторы, планируя пропорции между квартирами, имеющими 2, 3, 4 и так далее комнат.

**Рассмотрим задания из базы ЕГЭ.**

## Задание B10 (№ 321781) При изготовлении подшипников диаметром 64 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,963. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 63,99 мм, или больше, чем 64,01 мм.

## Решение. Опыт состоит в выборке одного подшипника. Построим множество исходов рассматриваемого опыта. Из условия задачи ясно, что подшипники условно разделяют на две группы – подшипники, диаметр которых отличается от заданного не больше чем на 0,01 мм, и подшипники, диаметр которых отличается от заданного более чем на 0,01 мм. Поэтому в рассматриваемом опыте полную группу исходов образуют исходы:

U1={диаметр подшипника отличается от заданного не больше чем на 0,01}, причем, согласно условию задачи, вероятность этого исхода равна 0,963, то есть P(U1)=0,963

U2={диаметр подшипника отличается от заданного более чем на 0,01}.

Поскольку эти два исхода образуют полную группу исходов U={U1, U2} рассматриваемого опыта, то P(U2)=1- P(U1)=1-0,963=0,037.

Фраза: «случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 63,99 мм, или больше, чем 64,01 мм» означает, что диаметр подшипника отличается от заданного более чем на 0,01 мм. Поэтому, вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 63,99 мм, или больше, чем 64,01 мм, равна вероятности исхода U2 и равна 0,037.

Ответ. 0,037.

Отметим, что рассмотренный пример может стать яркой иллюстрацией того, что с изучаемым опытом обычно связа­но несколько вероятностных пространств. Действительно, например, исходами рассмотренного в задаче № 321781 опыта, могут быть: V1={диаметр подшипника не больше 62 мм}, V2={диаметр подшипника больше 62 мм и меньше 63,99 мм}, V3={диаметр подшипника не меньше 63,99 мм и не больше 64,01 мм}, V4={диаметр подшипника больше 64,01 мм и меньше 70 мм} и V5={диаметр подшипника не меньше 70 мм}. Эти исходы взаимно исключают друг друга, и в результате опыта один из них обязательно произойдет. Поэтому они образуют множество V={V1, V2, V3, V4, V5} возможных исходов опыта. Вопрос лишь в том, насколько удобно такое представление при заданных условиях.

1. **Задание B10 (№ 322193)** Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 16 пассажиров, равна 0,88. Вероятность того, что окажется меньше 14 пассажиров, равна 0,53. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 14 до 15.

Решение. Для начала попытаемся понять - где и кому в повседневной жизни приходится сталкиваться с необходимостью подсчета пассажиров в транспорте. Например, для определения рентабельности пассажирских перевозок в междугородных автобусных маршрутах, в зависимости от наполняемости автобуса в конкретный день недели. Для того чтобы проследить эту наполняемость, мы с вами, став на минуточку контролёрами, входим в автобус на начальной остановке и видим… Что мы можем увидеть? Действительно, мы видим людей, находящихся в автобусе. Но, что нас интересует с точки зрения рентабельности? Конечно же - количество пассажиров, и это число может быть равным, например, 3 - в автобусе 3 пассажира. Ещё! 17 - в автобусе 17 пассажиров и так далее. Вот это, зафиксированное нами число, оказавшихся в автобусе пассажиров, и является возможным исходом нашего опыта. Ну а теперь, давайте перейдем к построению (мы строим) системы возможных исходов рассматриваемого опыта.

## Итак,

U0={в понедельник автобус пустой},

U1={в понедельник в автобусе 1 пассажир},

U2={в понедельник в автобусе 2 пассажира},

U3={в понедельник в автобусе 3 пассажира},

U4={в понедельник в автобусе 4 пассажира},

………………………………………………………

………………………………………………………

U13={в понедельник в автобусе 13 пассажиров},

U14={в понедельник в автобусе 14 пассажиров},

U15={в понедельник в автобусе 15 пассажиров},

U16={в понедельник в автобусе не менее 16 пассажиров}.

Таким образом, при заданных условиях, множество исходов рассматриваемого опыта состоит из семнадцати элементов U= {U0, U1*,* U2, U3*,…* U15, U16}. Эти исходы взаимно исключают друг друга, и в результате опыта один из них обязательно произойдет.Исходы не являются равновероятными.

**Более того, найти вероятность каждого из этих исходов не представляется возможным. ОДНАКО,**

Вероятность **P1**того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 14 пассажиров, равна сумме вероятностей исходов U0, U1, U2,…,U12, U13 и равна, согласно условию задачи, 0,53, то есть

**P1**=P(U0)+P(U1)+P(U2)+…+P(U12)+P(U13)=0,53

Вероятность **P2** того, что в понедельник в автобусе будет от 14 до 15 пассажиров, равна сумме вероятностей исходов U14 , U15, то есть

**P2**=P(U14 )+P(U15).

Вероятность **P3** того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 16 пассажиров, равна сумме вероятностей исходов U0, U1, U2,…,U13, U14 U15  и равна, согласно условию задачи, 0,88, то есть

**.** Из равенства **P1+P2=P3**  следует, что искомая вероятность **P2=P3-P1**=0.88-0,53=0,35.

ОТВЕТ: 0,35

Таким образом, задача решена, но возникает вопрос: «Имеет ли практическую ценность, полученный результат с позиции востребованности автобусного маршрута, то есть можно ли интерпретировать этот результат в рамках обозначенной проблемы?» При заданных условиях, вероятность того, что число пассажиров будет от 14 до 15 равна 0,35. Этот результат означает, что если опыт повторятьбольшоечисло *N* раз*,* то примерно в 0,35 *N* случаях в автобусе по понедельникам окажется от 14 до 15 человек. С большой или не очень большой натяжкой, можно утверждать, что примерно в 35 поездках из 100 поездок (один понедельник – одна поездка), в автобусе будет от 14 до 15 пассажиров. Решайте сами: рентабельно или нет! Проведённого исследования недостаточно для того, чтобы судить о рентабельности маршрута, поскольку наполняемость автобуса – лишь один из критериев рентабельности. Кроме того, в автобусе может оказаться более 15 пассажиров. Возможно, такая наполняемость случается гораздо чаще?!! Кто-то может ответить на этот вопрос?

Теперь, разобравшись с решением этой задачей, давайте попытаемся в рамках той же структуры смоделировать иную проблемную ситуацию. Ну, например, выпуклый двадцатигранник причудливой формы из неоднородного материала со смещенным центром тяжести, на гранях которого записаны целые числа от 0 до19, подбрасывают один раз. Вероятность того, что на нижней грани (грань, оказавшаяся в плоскости стола) многогранника окажется меньше 16 очков, равна 0,88. Вероятность того, что на нижней грани окажется меньше 14 очков, равна 0,53. Найдите вероятность того, что на нижней грани многогранника окажется от 14 до 15 очков.

Поскольку задача решается аналогично предыдущей задаче (решите самостоятельно), предлагаю ограничиться лишь ответами на следующие вопросы: «Чем объясняется наличие в условиях задачи двадцатигранника, и нельзя ли было ограничиться шестнадцатигранником? Какое возможно наименьшее число граней у многогранника?». «Почему в условиях задачи речь идёт о выпуклом многограннике именно причудливой формы со смещённым центром тяжести?».

**ДО БЕЗОБРАЗИЯ ЗНАКОМАЯ ЗАДАЧА.**

Игральный кубик подбрасывают один раз. Найдите вероятность выпадения на верхней грани кубика от 4 до 5 очков.

РЕШЕНИЕ.

Опыт состоит в подбрасывании кубика. **Построим** множество всевозможных исходов рассматриваемого опыта.

U1={на верхней грани кубика выпало 1 очко}, причем P(U1)=

U2={ на верхней грани кубика выпало 2 очка}, причем P(U2)=

U3={ на верхней грани кубика выпало 3 очка}, причем P(U3)=

U4={ на верхней грани кубика выпало 4 очка}, причем P(U4)=

U5={ на верхней грани кубика выпало 5 очков}, причем P(U5)=

U6={ на верхней грани кубика выпало 6 очков}, причем P(U6)=

**В этой задаче, в отличие от предыдущей, возможно найти вероятность каждого исхода. ПОЭТОМУ,**

Вероятность **P2**того, что, на верхней грани кубика выпадет от 4 до 5 очков, равна сумме вероятностей исходов U4, U5 , то есть **P2**=P(U4)+P(U5)=.

ОТВЕТ: .

**Можно решить эту задачу иначе, чтобы ещё раз осмыслить решение задачи № 322193!!!!!!!!**

Вероятность **P1** того, что на верхней грани кубика выпадет меньше 4 очков, равна сумме вероятностей исходов U1, U2, U3 , то есть **P1**=P(U1)+P(U2)+P(U3)==.

Вероятность **P2** того, что на верхней грани кубика выпадет от 4 до 5 очков, равна сумме вероятностей исходов U4, U5 , то есть **P2**=P(U4)+P(U5).

Вероятность P3 того, что на верхней грани кубика выпадет меньше 6 очков, равна сумме вероятностей исходов U1, U2, U3, U4, U5 , то есть **P3**=P(U1)+P(U2)+P(U3)+P(U4)+P(U5)=**P1+P2=** =. Из равенства **P3=P1+P2** следует, что искомая вероятность равна

**P2 =P3-P1=.**

ОТВЕТ: .

**Задачи и базы ЕГЭ.**

## Задание B10 (№ 321799) Вероятность того, что на тесте по истории учащийся Д. верно решит больше 11 задач, равна 0,64. Вероятность того, что Д. верно решит больше 10 задач, равна 0,7. Найдите вероятность того, что Д. верно решит ровно 11 задач.

## Задание B10 (№ 320731) Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,96. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,83. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

**Определение. Два события *Х* и Y называют несовмест­ными*,* если их пересечением является невозможное событие (т. е. если никакой исход не может быть благоприятен обоим событиям одновременно). Иными словами, *Х* и Y называют несовмест­ными*,* если эти события не могут произойти одновременно.**

**Теорема. Если события A и B несовместны, то P(A∪B)=P(A)+P(B). То есть вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.**

## Задание B10 (№ 320381) На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Внешние углы», равна 0,35. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

## Решение. Опыт состоит в «извлечении» одного вопроса. При этом согласно условию задачи вопросов, относящихся одновременно к темам «Внешние углы» и «Вписанная окружность», нет. Поэтому события A – «выбран вопрос по теме «Внешние углы» - и B – «выбран вопрос по теме «Вписанная окружность» - являются несовместными, причём P(A)=0,35, P(B)=0,2. А значит, по теореме о вероятности объединения двух несовместных событий, искомая вероятность равна сумме P(A)+P(B) и равна 0,35+0,2=0,55.

## Ответ. 0,55.

## В чём заключается ошибочность, например, такого решения: опыт состоит в «извлечении» одного вопроса, при этом, согласно условию задачи, возможными исходами рассматриваемого опыта являются: U1={выбран вопрос по теме «Внешние углы»}, U2={выбран вопрос по теме «Вписанная окружность»} и U3={выбран вопрос из другой темы}, причём P(U1)=0,35, P(U2)=0,2. Таким образом, множество исходов рассматриваемого опыта состоит из трёх элементов: U1, U2 и U3. Так как, по условию задачи, вопросов, относящихся одновременно к темам «Внешние углы» и «Вписанная окружность», нет, то события U1 и U2 являются несовместными, а значит, по теореме о вероятности объединения двух несовместных событий, искомая вероятность равна сумме P(U1)+P(U2) и равна 0,35+0,2=0,55.

## Ответ. 0,55.

## Ошибочно считать множество U={U1, U2, U3} множеством возможных исходов рассматриваемого опыта, так как нам ничего не известно о непересечении пар исходов: U1, U3 иU2, U3.

## Из выше сказанного невольно напрашивается вывод о том, что рассматриваемому опыту нельзя сопоставить множество U из попарно непересекающихся исходов. Однако это далеко не так. Попытаемся построить такое множество, поступив следующим образом: воспользуемся оглавлением учебника Геометрия 7-9 класс и составим исходы, соответствующие каждому пункту этого учебника. Возможно, получившиеся исходы будут попарно непересекающимися.

**Определение. Два события называются независимыми, если вероятность одного из них не изменяется в результате того, наступило или не наступило другое.**

**Примерами** независимых событий являются выпадение различного числа очков при повторном бросании игральной кости или той или иной стороны монет при повторном бросании монеты, так как очевидно, что вероятность выпадения герба при втором бросании равна ½ независимо от того, выпал или не выпал герб в первом.

Аналогично, вероятность вынуть во второй раз белый шар из урны с белыми и черными шарами, если вынутый первым шар предварительно возвращен, не зависит от того, белый или черный шар был вынут в первый раз. Поэтому результаты первого и второго вынимания независимы между собой. Наоборот, если шар, вынутый первым, не возвращается в урну, то результат второго вынимания зависит от первого, ибо состав шаров, находящихся в урне после первого вынимания, меняется в зависимости от его исхода. Здесь мы имеем **пример зависимых событий.**

**Теорема (о вероятности совместного осуществления двух независимых событий). Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятности этих событий: P(A∩B)=P(A)•P(B).**

Рассмотрим теперь несколько событий: A, B, …, L. Будем называть их **независимыми в совокупности, если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли ли какие – либо другие рассматриваемые события или нет.**

**Замечание.** Отметим, что, из по парной независимости событий не следует их независимость в совокупности. В самом деле, рассмотрим пример.

Пусть в ящике 4 шара: черный, красный, белый и пестрый – окрашенный в полоску всеми этими тремя цветами. Обозначим события: после изъятия шара видим

A – “черный цвет”, B – “красный цвет”, C – “белый цвет”, тогда P(A)=P(B)=P(C)=1/2;

PB(A)=PC(A)=PA(C)=PB(C)=PC(B)=PA(B)=1/2.

Отсюда

PB(A)=P(A); PC(A)=P(A); PA(C)=P(C); PB(C)=P(C); PC(B)=P(B); PA(B)=P(B).

Это значит, что события A, B, C попарно независимы. Тем не менее, если известно, что в результате изъятия шара наступили события A и B, то вероятность события C становится равной 1. Значит, в совокупности A, B и C не являются независимыми.

**Теорема (о вероятности совместного осуществления событий независимых в совокупности). Вероятность пересечения событий A, B, …, L независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий: P(A∩B∩…∩L)=P(A)•P(B)•…•P(L).**

## Задание B10 (№ 320481) Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 4 раз попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

## Решение. Итак, представим биатлониста стреляющего по мишеням расположенным в 500 метрах от места ведения огня. Биатлонист делает первый выстрел. Как вы думаете, важен ли результат одного выстрела? Если важен, то биатлонист поднимается, пробегает каких-то 500 метров до мишеней, возвращается обратно и делает второй выстрел. Как вы считаете, важен ли результат двух выстрелов? Если важен, то биатлонист снова поднимается, добегает до мишеней и, реально, видит результаты двух выстрелов, в том числе и первого. Возвращается на линию огня и делает третий, четвертый и пятый выстрелы. После чего он добегает до мишеней и смотрит результат всех пяти выстрелов. Давайте подумаем, чем может отличаться один такой результат от другого? Действительно, первое – количеством попаданий и промахов, второе – порядком попаданий и промахов. А значит результатами (исходами) его стрельбы могут быть:

## U1={П; П; П; П; П}, здесь и далее П – попал при одном выстреле, Н – не попал при одном выстреле,

## U2={П; П; П; П; Н}, U3={П; П; П; Н; Н}, U4={П; П; Н; Н; Н}, U5={П; Н; Н; Н; Н}, U6={Н; Н; Н; Н; Н}, U7={Н; П; П; П; П}, U8={Н; Н; П; П; П}, U9={Н; Н; Н; П; П}, U10={Н; Н; Н; Н; П}, U11={Н; П; Н; Н; Н}, U12={Н; П; П; Н; Н}, U13={Н; П; П; П; Н}, U14={Н; П; Н; П; Н}, U15={Н; Н; П; Н; Н}.

## Споткнувшись о техническую трудность, связанную с выписыванием всех возможных исходов, возникают вопросы: «Насколько это необходимо для решения поставленной задачи? Нельзя ли ограничиться рассмотрением лишь «нужных» для решения этой задачи исходов?» Событию A - «биатлонист первые 4 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся», вероятность которого требуется найти, благоприятствует лишь один исход U2={П; П; П; П; Н}. Вероятность этого исхода, а стало быть, и искомая вероятность, согласно теореме о вероятности совместного осуществления событий независимых в совокупности, равна произведению, то есть

## Ответ. 0,07.

## Задание B10 (№ 322293) Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Протор» по очереди играет с командами «Стратор», «Стартер» и «Ротор». Найдите вероятность того, что «Протор» будет начинать только вторую и последнюю игры.

## Решение. Согласно условию задачи, команда «Протор» по очереди играет с каждой из трёх команд «Стратор», «Стартер» и «Ротор», то есть суждено случиться трём играм: «Протор» - «Стратор», «Протор» - «Стартер» и «Протор» - «Ротор». А значит, для того чтобы определиться какая из команд в каждой игре начнет игру с мячом, капитану команды «Протор» придётся три раза тянуть честный жребий. Поэтому возможными исходами рассматриваемого опыта служат:

## U1={П+; П+; П-}, здесь и далее П+ – команда «Протор» начинает игру с мячом, П- – игру с мячом начинает противник команды «Протор», U2={П+; П+; П+}, U3={П+; П-; П-}, U4={П-; П+; П+}, U5={П-; П-; П+}, U6={П-; П-; П-}, U7={П-; П+; П-}, U8={П+; П-; П+}. Таким образом, множество всевозможных исходов рассматриваемого опыта состоит из восьми элементов U1*,* U2, U3*,…* U7, U8. Эти исходы взаимно исключают друг друга, и в результате опыта один из них обязательно произойдет. Событию D – «команда «Протор» начнёт вторую и последнюю игры» благоприятствует исход U4, а значит искомая вероятность равна вероятности этого исхода U4={П-; П+; П+}. Поскольку, возможность вытащить жребий с правом начала игры, не обладает ни каким преимуществом перед возможностью не вытащить такой жребий, то . А значит искомая вероятность, согласно теореме о произведении вероятностей событий независимых в совокупности, равна произведению: .

## Ответ. 0,125.

**Задачи из базы ЕГЭ.**

## Задание B10 (№ 321995) В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

## Задание B10 (№ 321033) Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Изумруд» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Изумруд» выиграет жребий ровно два раза.

## Прототип задания B10 (№ 320186) На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

## Задание B10 (№ 321985) Чтобы поступить в институт на специальность «Международное право», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 73 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Социология», нужно набрать не менее 73 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент Л. получит не менее 73 баллов по математике, равна 0,5, по русскому языку — 0,9, по иностранному языку — 0,9 и по обществознанию — 0,7.

Найдите вероятность того, что Л. сможет поступить на одну из двух упомянутых специальностей.

Решение. Не так уж нескоро каждому из вас предстоит сдача ЕГЭ по выбранным вами предметам, с целью продолжения получения образования. Уверен, что многие из вас, для подстраховки, помимо основного направления получения образования рассмотрели и запасные варианты. Возможно, именно поэтому некоторые из вас помимо экзаменов по двум обязательным предметам сдают экзамены по предметам, которые являются конкурсными для поступления на ту или иную специальность. Прежде чем непосредственно перейти к решению задачи, ответим на несколько организационных вопросов, которые к математике не имеют ни какого отношения. «Сколько раз каждый из вас имеет право сдавать ЕГЭ по отдельно взятому предмету?» Вы абсолютно правы, только один раз – один подход. На это мне хотелось бы обратить особое внимание: ровно один раз! «Имеет ли значение, для поступления в ВУЗ порядок расположения предметов в расписании ЕГЭ?» Конечно же, нет!!! «Что, на ваш взгляд, действительно имеет значение для поступления на выбранную вами специальность?» Правильно – результаты ЕГЭ по выбранным вами предметам.

А теперь перейдём к решению задачи. Опыт состоит в сдаче ЕГЭ по четырём предметам. Поскольку порядок сдачи ЕГЭ, по выбранным вами предметам, не имеет значения, то для сохранения интриги будем считать, что последним в расписании ЕГЭ, из четырех упомянутых в условии задачи предметов, стоит математика. Как известно, по результатам ЕГЭ каждому из вас выдаётся свидетельство с указанием тестовых баллов по каждому из четырёх предметов. Давайте подумаем, чем могут отличаться свидетельства учащихся, сдавших те же четыре предмета? Правильно – количеством баллов по каждому из четырех предметов. Как вы думаете, сколько существует различных свидетельств? Действительно, очень много? А что если, с учетом условий задачи, различать свидетельства лишь в зависимости от того каким в сравнении с числом 73 (менее 73 или не менее 73) будет набранный балл по каждому из четырёх предметов. Сколько в этом случае будет различных свидетельств? Согласен, значительно меньше. И все такие свидетельства о результатах ЕГЭ по четырем предметам – русский язык, математика, иностранный язык и обществознание, мы можем рассматривать, как возможные исходы рассматриваемого опыта. А нельзя ли указать все такие исходы? Давайте попробуем!!!

Итак,

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| предмет | **русский язык** | **иностранный язык** | **обществознание** | **математика** | **ИСХОД** |
| Свидетельство 1  Свидетельство 2  Свидетельство 3  Свидетельство 4  Свидетельство 5  Свидетельство 6  Свидетельство 7 | <73  <73  <73 | <73  <73  <73 | <73  <73    <73 | <73 | (Р+,И+,О+,М+)  (Р+, И+, О+, М-)  (Р+, И+, О-, М-)  (Р+, И-, О-, М-)  (Р-, И-, О+, М+)  (Р-, И-, О-, М+)  (Р-, И+, О+, М+) |
| и так далее | и это всего лишь часть свидетельств | | | |  |

Проделанная работа, даёт возможность убедиться в том, что таких исходов будет немало. Возникшая рутинная работа, заставляет задуматься: все ли исходы нам интересны для ответа на главный вопрос задачи? Очевидно, что не все. Нас интересуют лишь те свидетельства, в которых напротив каждого из двух предметов - математика и русский язык, стоит не менее 73 баллов и напротив ровно одного из двух предметов - иностранный язык и обществознание, стоит не менее 73 балов. Таким образом, интересующими нас исходами являются: U={Р+; И+; О-; М+) и W={Р+; И-; О+; М+}, причем, согласно теореме о вероятности совместного осуществления событий независимых в совокупности,  и . И, наконец, интересующая нас вероятность P равна сумме вероятностей исходов U и W, то есть P=P(U)+P(W)=0,1215+0,0315=0,153.

Ответ. 0,153

Рассмотренный пример может стать яркой иллюстрацией того, что в рамках одного опыта можно **построить** ни одно множество возможных исходов этого опыта. Действительно, например, исходами, рассмотренного в задаче № 321985, опыта, могут стать всевозможные свидетельства результатов ЕГЭ по четырём предметам – русский язык, математика, иностранный язык, обществознание. Вопрос лишь в том, насколько такое представление неудобно при заданных условиях.

Замечание. Распространенной ошибкой при решении этой задачи, является неверное понимание механизма сдачи ЕГЭ. Учащиеся почему-то считают, что у них есть две возможности сдачи ЕГЭ по математике и по русскому языку. Именно по этой причине учащиеся сначала находят вероятность успешной сдачи экзамена по трём предметам – русский язык, математика и иностранный язык, необходимых для поступления на специальность «Международное право», без учёта результата сдачи ЕГЭ по обществознанию. Затем учащиеся находят вероятность успешной сдачи экзамена по предметам - русский язык, математика и обществознание, без учёта результата ЕГЭ по иностранному языку. При таком неверном способе решения получается солидная вероятность P поступления на одну из специальностей. Действительно, .

## Задание B10 (№ 321491) В классе 33 учащихся, среди них два друга — Михаил и Вадим. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Михаил и Вадим окажутся в одной группе.

## Решение. Согласно вопросу задачи, нас интересует распределение двух парней по трём группам (для удобства пронумеруем эти группы: группа 1, группа 2 и группа 3). Поэтому возможными исходами рассматриваемого опыта являются:

U1={Михаил в первой группе, Вадим во второй группе}=(М1, В2),

U2={Михаил в первой группе, Вадим в третьей группе}=(М1, В3),

U3={Михаил в первой группе, Вадим в первой группе}=(М1, В1),

U4={Михаил во второй группе, Вадим в первой группе}=(М2, В1),

U5={Михаил во второй группе, Вадим во второй группе}=(М2, В2),

U6={Михаил во второй группе, Вадим в третьей группе}=(М2, В3),

U7={Михаил в третьей группе, Вадим в первой группе}=(М3, В1),

U8={Михаил в третьей группе, Вадим во второй группе}=(М3, В2),

U9={Михаил в третьей группе, Вадим в третьей группе}=(М3, В3),

Таким образом, множество U всех исходов рассматриваемого опыта состоит из девяти элементов U= {U1*,* U2, U3*,…* U7, U9}, причём событию A – «Михаил и Вадим оказались в одной группе» - благоприятствуют лишь три исхода - U3, U5 и U9. Найдём вероятность каждого из этих исходов. Так как по условию задачи класс из 33 человек случайным образом делится на три равных группы, то в каждой такой группе окажется по 11 учащихся этого класса. Исключительно ради удобства решения задачи представим себе 33 стула, расположенных в один ряд, на сидушках которых написаны цифры: на первых 11 стульях написана цифра 1, на следующих 11 стульях – цифра 2 и на последних одиннадцати стульях – цифра 3. Вероятность того, что Михаилу достанется стул с цифрой 1, равна (11 стульев с цифрой 1 из общего количества стульев). После того как, Михаил сел на стул с цифрой 1, остаётся лишь 32 стула, среди которых лишь 10 стульев с цифрой 1, поэтому, вероятность того, что Вадиму достанется стул с той же цифрой 1 равна . Следовательно, вероятность исхода U3={Михаил в первой группе, Вадим в первой группе}=(М1, В1) равна произведению  и равна . Рассуждая аналогичным образом, находим вероятности исходов U5 и U9. Имеем, P(U5)=P(U9)=P(U3)=.

Таким образом, P(A)=P(U3)+P(U5)+P(U9)=.

Ответ. 0,3125.

Замечание. Многие учащиеся, составив множество U возможных исходов рассматриваемого опыта, искомую вероятность находят как частное от деления числа исходов U3, U5 и U9, благоприятствующих событию A к числу всевозможных исходов U1*,* U2, U3*,…* U7, U9, то есть P(A)=. Ошибочность такого решения заключается в том, что исходы рассматриваемого опыта не являются равновероятными. Действительно, P(U1)=, а P(U3)=.

## Прототип задания B10 (№ 320188) Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

## Решение. По условию задачи, команда проводит две игры, причем результатом каждой такой игры может быть либо выигрыш, либо проигрыш, либо ничья. А значит, возможными исходами этого опыта являются: U1={В; В}, здесь и далее В – команда выиграла игру, П – команда проиграла игру, Н – команда сыграла в ничью, U2={В; Н}, U3={В; П}, U4={П; В}, U5={П; Н}, U6={П; П}, U7={Н; Н}, U8={Н; П}, U8={Н; В}. Таким образом, множество всевозможных исходов рассматриваемого опыта состоит из 9 элементов, причем событию C – «футбольная команда прошла в следующий круг соревнований» благоприятствуют исходы U1={В; В}, U2={В; Н} и U8={Н; В}, так как наступление каждого из этих исходов гарантирует нужное количество очков для выхода в следующий круг соревнований. Найдем вероятности исходов U1={В; В}, U2={В; Н} и U8={Н; В}. По условию задачи, вероятности выигрыша и проигрыша равны по 0,4, поскольку результатом одной игры может стать либо выигрыш, либо проигрыш, либо ничья, то вероятность ничьи равна разности 1-(U2+U8) и равна 0,2. А значит, согласно теореме о вероятности произведения независимых событий, P(U1)=0,40,4=0,16 и P(U2)=P(U8)=0,40,2=0,08. Итак, искомая вероятность равна: P(C)= P(U1)+ P(U2)+P(U8)=0,16+0,08+0,08=0,32.

## Ответ. 0,32.

**Задачи и базы ЕГЭ.**

## Задание B10 (№ 322395) В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,7 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 15 апреля погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 18 апреля в Волшебной стране будет отличная погода.

**Определение. Два события, которые в данных условиях могут происходить одновременно, называют совместными.**

**Теорема. Для любых двух совместимых событий справедливо равенство**

**P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B),**

**То есть вероятность объединения двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного осуществления.**

## Задание B10 (№ 320433) В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,16. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

## Решение. Согласно вопросу задачи, нас интересует наличие кофе в двух автоматах по истечении одного дня. Поэтому возможными исходами рассматриваемого опыта являются: U1={в первом автомате остался кофе, во втором автомате остался кофе}={I+; II+} здесь и далее I+ – в первом автомате остался кофе, II- - во втором автомате закончился кофе, U2={в первом автомате остался кофе, во втором автомате закончился кофе}={I+; II-}, U3={в первом автомате закончился кофе, во втором автомате остался кофе}={I-; II+} и U4={в первом автомате закончился кофе, во втором закончился кофе}={I-; II-}. Таким образом, множество возможных исходов рассматриваемого опыта состоит из четырёх элементов: U1, U2, U3 и U4, причём вероятность исхода U4={I-; II-} нам известна, и она равна 0,16. Заметим, что исходы I- – в первом автомате закончился кофе и II- - во втором автомате закончился кофе не являются независимыми. Действительно, если предположить обратное, то по теореме о вероятности совместного осуществления двух независимых событий вероятность исхода U4={I-; II-} получится равной , тогда как по условию задачи эта вероятность равна 0,16. Кроме того, поскольку оба исхода I- и II- могут наступить одновременно, то эти исходы являются совместными. А значит, вероятность события D=(I-II-) – «кофе закончится хотя бы в одном из автоматов», которому благоприятствуют исходы U2={I+; II-}, U3={I-; II+} и U4={I-; II-}, согласно теореме о вероятности объединения двух совместных событий, равна: P(I-II-)=P(I-)+P(II-)-P(I-II-)=0,3+0,3-0,16=0,44. Событие C – «к концу дня кофе остался в обоих автоматах» является противоположным событию D=(I-II-) – «кофе закончится хотя бы в одном из автоматов», а значит, вероятность события C равна: 1-0,44=0,56.

## Ответ. 0,56.

**Определение. События называются *противоположными* друг другу, если любой исход благоприятен одному и только одному из них**.

**Теорема (о вероятности противоположных событий). Для любого события A имеем: P(‾A)=1-P(A).**

## Задание B10 (№ 320631) Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,27. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

## Решение. Построим множество возможных исходов рассматриваемого опыта. В соответствии с вопросом задачи, нас интересует результат работы трёх ламп по истечении одного года. Поэтому, исходы нашего опыта таковы:

U1={первая лампа горит, вторая лампа горит, третья лампа горит}=(Г, Г, Г), причем .

U2={первая лампа горит, вторая лампа горит, третья лампа перегорела}=(Г, Г, П), причем .

U3={первая лампа горит, вторая лампа перегорела, третья лампа перегорела}=(Г, П, П), причем .

U4={первая лампа перегорела, вторая лампа перегорела, третья лампа горит}=(П, П, Г), причем .

U5={первая лампа перегорела, вторая лампа горит, третья лампа горит}=(П, Г, Г), причем .

U6={первая лампа перегорела, вторая лампа перегорела, третья лампа перегорела}=(П, Г, П), причем .

U7={первая лампа горит, вторая лампа перегорела, третья лампа горит}=(Г, П, Г), причем .

U8={первая лампа перегорела, вторая лампа перегорела, третья лампа перегорела}=(П, П, П), причем .

Таким образом, множество U всех исходов рассматриваемого опыта состоит из восьми элементов U= {U1*,* U2, U3*,…* U7, U8}. Заметим, что исходы опыта не являются равновероятными.

## Событие А - «в течение года хотя бы одна лампа не перегорит» является противоположным событию - «в течении года перегорят все три лампы» (действительно, событию А благоприятствуют исходы U1*,* U2, U3*,…* U7, а событию благоприятствует исход U8), поэтому искомая вероятность, согласно теореме о вероятности противоположных событий, равна разности 1-. Найдем вероятность события . . Таким образом, искомая вероятность, равная разности 1-, равна 0,980317.

## Ответ. 0,980317.

Отметим, что искомую вероятность можно найти иначе, сложив вероятности исходов U1*,* U2, U3*,…* U7. Имеем, **.** Совпадение двух результатов, в частности, позволяет убедиться в том, что множество исходов, скорее всего, составлено правильно и все исходы рассматриваемого опыта учтены.

**Задания из базы ЕГЭ.**

## Прототип задания B10 (№ 320187) При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

## Задание B10 (№ 322009) По отзывам покупателей Игорь Игоревич оценил надёжность двух интернет - магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,91. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,89. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет - магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

## Решение. Опыт состоит в доставке товара двумя магазинами. Поэтому возможными исходами рассматриваемого опыта являются:

## U1={ магазин А доставил товар; магазин Б доставил товар}=(Д; Д),

## U2={магазин А доставил товар; магазин Б не доставил товар}=(Д; Н), здесь и далее Д – магазин доставил товар, Н - магазин не доставил товар,

## U3={магазин А не доставил товар; магазин Б доставил товар}=(Н; Д),

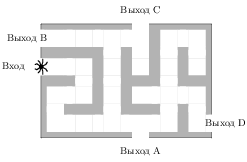
## U4={магазин А не доставил товар; магазин Б не доставил товар}=(Н; Н).

## Таким образом, множество U всех исходов рассматриваемого опыта состоит из четырёх элементов: U={U1*,* U2, U3*,*U4}. Событие C – «ни один магазин не доставил товар» совпадает с исходом U4 множества возможных исходов рассматриваемого опыта. Поэтому искомая вероятность равна вероятности этого исхода и, согласно теореме о вероятности противоположных событий и тереме о вероятности произведения независимых событий, равна произведению . В этом произведении разность есть вероятность того, что товар не доставят из магазина A, а разность - вероятность того, что товар не доставят из магазина Б.

## Ответ. 0,0099

## Задачи из базы ЕГЭ

## Задание B10 (№ 323007) На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может. На каждом разветвлении паук выбирает путь, по которому ещё не полз. Считая выбор дальнейшего пути случайным, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу A.



## Задание B10 (№ 322529) Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,03. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

## Задание B10 (№ 320573) В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,12 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

**Определение. Пусть A и X – зависимые события. Число, выражающее вероятность события A при условии, что произошло событие X, называется условной вероятностью события A относительно события X и обозначается PX(A).**

**Теорема. Вероятность пересечения двух зависимых событий A и X равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило, то есть справедлива формула P(A∩X)=P(X)•PX(A)**

**Теорема (о полной вероятности). Пусть вероятностное пространство U представлено в виде объединения попарно несовместных событий X1, X2,…, Xn:**

**U= X1∪ X2∪…∪ Xn,**

**Где Xi∩Xj=∅ при i≠j. Тогда для любого события A верно равенство**

**То есть вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждого из событий Xk, где k от 1 до n, на соответствующую условную вероятность события A.**



**Определение. Если любые два события из множества *{X1, ..., Хn}* несовместны, то эти собы­тия называют *попарно несовместными.***

## Задание B10 (№ 320999) Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,4. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

## Решение. По условию задачи, ковбой Джон наудачу хватает один из 10 револьверов, среди которых лишь 2 пристрелянные, поэтому вероятность того, что схваченный наудачу пистолет будет пристрелянным равна , а вероятность того, что схваченный пистолет не является пристрелянным, равна .

Вероятность не попадания в муху зависит от того какой пистолет ему попался. Если этот пистолет пристрелянный, то с учетом условия задачи и теоремы о вероятности противоположных событий, вероятность промаха равна 1-0,9=0,1, а значит вероятность совместного (Джон не попал в муху из пристрелянного пистолета) осуществления двух зависимых событий: A – «Джон не попал в муху» и B – «схваченный пистолет пристрелян», равна произведению P(A∩B)=P(B)•PB(A) и равна .

## Если же пистолет оказался непристрелянным, то вероятность не попадания в муху равна 1-0,4=0,6, а стало быть, вероятность совместного (Джон не попал в муху из непристрелянного пистолета) осуществления двух зависимых событий: A – «Джон не попал в муху» и С – «схваченный пистолет не пристрелян», равна произведению P(A∩C)=P(C)•PC(A) и равна .

## Поскольку, событие A – «Джон не попал в муху» является объединением двух несовместных событий A∩B и A∩C, то его вероятность, по теореме сложения, равна: P(A)=P(A∩B) + P(A∩C)=0,02+0,48=0,5.

## Ответ. 0,5.

## Отметим, что возможными исходами, рассмотренного опыта, являются: U1={ковбой Джон попал в муху} и U2={ковбой Джон не попал в муху}.

## Задание B10 (№ 319361) Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 30\% этих стекол, вторая — 70\%. Первая фабрика выпускает 4\% бракованных стекол, а вторая — 1\%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

## Решение. Опыт состоит в приобретении одного стекла. Возможными исходами рассматриваемого опыта являются: U1={куплено качественное стекло} и U2={куплено бракованное стекло}. Так как по условию задачи первая фабрика выпускает 30%, а вторая – 70% всех стёкол, то вероятность того, что купленное стекло изготовлено первой фабрикой, равна 0,3, а вероятность того, что купленное стекло изготовлено второй фабрикой, равна 0,7. Вероятность приобрести бракованное стекло зависит от того, какой фабрикой оно изготовлено. Если стекло изготовлено первой фабрикой, то вероятность купить бракованное стекло равна 0,04, если же стекло выпущено второй фабрикой, то вероятность такого приобретения равна 0,01. Поэтому вероятность совместного (куплено бракованное стекло, изготовленное первой фабрикой) осуществления двух зависимых событий: U2={куплено бракованное стекло} и D – «стекло изготовлено первой фабрикой» равна произведению , а вероятность совместного (куплено бракованное стекло, изготовленное второй фабрикой) осуществления двух зависимых событий: U2={куплено бракованное стекло} и C – «стекло изготовлено второй фабрикой» равна произведению . События «куплено бракованное стекло, изготовленное первой фабрикой», и «куплено бракованное стекло, изготовленное второй фабрикой» являются несовместными, поэтому вероятность их объединения равна сумме их вероятностей и равна: .

## Ответ. 0,019.

## Замечание. Можно воспользоваться теоремой о полной вероятности, возможно, это сократит время решения. Но с точки зрения понимания... Не уверен!!!

## Задание B10 (№ 319553) Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,56. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

## Решение. Опыт состоит в проведении двух шахматных партий гроссмейстером A. По условию задачи известно, что одну из двух партий гроссмейстер A однозначно играет белыми фигурами, а вторую партию – однозначно чёрными, именно поэтому вероятность выигрыша гроссмейстера A в одной из партий равна 0,56, а вероятность его же выигрыша в другой партии равна 0,3. А значит, искомая вероятность, по теореме о вероятности совместного осуществления независимых событий, равна произведению 0,560,3 и равна 0,168.

## Ответ. 0,168.

## Отметим, что возможными исходами рассматриваемого опыта являются: U1={Аб+; Ач-}, здесь и далее Аб+ означает, что гроссмейстер А играл белыми фигурами и выиграл, Ач- означает, что гроссмейстер А играл черными фигурами и проиграл, то есть выиграл гроссмейстер Б, U2={Аб+; Ач+}, U3={Аб-; Ач+}, U4={Аб-; Ач-}. Таким образом, множество всех исходов рассматриваемого опыта состоит из четырёх элементов. Нетрудно найти, что P(U1)=0,560,7=0,392, P(U2)=0,560,3=0,168, P(U3)=0,440,3=0,132 и P(U4)=0,440,7=0,308. Поскольку, P(U1)+P(U2)+P(U3)+P(U4)=0,392+0,168+0,132+0,308=1, то можно предположить, что, скорее всего, задача решена правильно и все возможные исходы учтены.

## Задание B10 (№ 322625) Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,03. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

## Решение. Так как, по условию задачи вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03, то вероятность противоположного события: «готовая батарейка исправна» равна разности 1-0,03 и равна 0,97. Опыт состоит в выборе одной батарейки. Возможными исходами рассматриваемого опыта являются: U1={батарейка забракована системой контроля} и U2={батарейка прошла систему контроля}. Вероятность того, что батарейка будет забракована системой контроля, зависит от качества самой батарейки. Действительно, по условию задачи вероятность забраковать исправную батарейку равна 0,03, а вероятность забраковать неисправную батарейку равна 0,96. А значит, вероятность совместного (неисправная батарейка забракована системой контроля) осуществления двух зависимых событий: A – «батарейка неисправна» и U1={батарейка забракована системой контроля} равна произведению , а вероятность совместного (исправная батарейка забракована системой контроля) осуществления двух зависимых событий: B – «батарейка исправна» и U1={батарейка забракована системой контроля} равна произведению . События «неисправная батарейка забракована системой контроля», и «исправная батарейка забракована системой контроля» являются несовместными, поэтому вероятность их объединения равна сумме их вероятностей и равна: .

## Ответ. 0,0579.

## Задачи из базы ЕГЭ.

## Прототип задания B10 (№ 320207 Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

**Теорема (сложения вероятностей несовместных событий). Если события A и B несовместны, то P(A∪B)=P(A)+P(B). То есть, вероятность объединения двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.**

**Многие практические задачи приводят к вопросам теории вероятностей, которые не укладываются в разобранную выше схему конечного числа попарно несовместных исходов опыта. Пусть, например, стержень наудачу разламывается на три части. Какова вероятность того, что из получившихся отрезков можно будет построить треугольник?**

**В этой задаче мы имеем бесконечное множество исходов, так как разлом может попасть на любую точку стержня. Поэтому данное выше определение вероятности события как суммы вероят­ностей исходов не годится. Мы будем пользоваться иным опре­делением вероятности, которое назовем *геометрическим.* Разберем следующую модель. Пусть на отрезок *АВ* бросают наудачу точку. Назовем вероятностью попадания**

**этой точки на часть этого от­резка отношение длины этой A B**

**части к длине всего отрезка (если часть состоит из несколь-**

**ких кусков, надо сложить длины этих кусков). Это естественно, так как, чем больше цель, тем вероятнее ее поразить. Оказывается, что свойства введенного таким образом понятия вероятности очень похожи на рассмотрен­ные в предыдущих пунктах. Именно справедливы утверждения:**

**1. Для любой части отрезка значение вероятности является неотрицательным числом, не превосходящим 1. Для самого отрезка значение вероятности равно 1.**

**2. Если части *Х* и Y не имеют общих точек (несовместны), то P(X∪Y)=P(X)+P(Y).**

**На основе этих двух утверждений для геометрических вероят­ностей можно определить те же понятия, что и в случае конечного вероятностного пространства, доказать аналоги формул сложения и умножения вероятностей и так далее.**

**Вместо отрезка *АВ* можно взять некоторую геометрическую фи­гуру, имеющую конечную площадь, и считать вероятностью по­пасть в часть Х этой фигуры отношение площадей указанной части и всей фигуры. Можно брать и объемы тел в трехмерном прост­ранстве. Все эти случаи, как и многие другие, охватываются аксиоматическим определением понятия вероятности, на котором мы не будем останавливаться.**

## Задание B10 (№ 322511). Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 2, но не дойдя до отметки 5 часов.

Решение. В рамках решения этой задачи рассмотрим две модели:

## 1) в круг произвольного радиуса бросают точку. Какова вероятность попадания этой точки в круговой сектор этого круга, соответствующий центральному углу в 90º ?;

## 2) на окружность произвольного радиуса бросают точку. Найдите вероятность попадания этой точки на дугу этой окружности, соответствующую центральному углу в 90º.

## В первом случае искомая вероятность равна отношению площади кругового сектора, равной площади четверти круга, к площади этого круга, то есть

## Во втором случае та же искомая вероятность равна отношению длины дуги окружности, равной длине четвери окружности, к длине самой окружности, то есть .

## Ответ. 0,25.

## Ещё раз вернемся к задаче № 322193 и в рамках той же структуры создадим ещё одну проблемную ситуацию. Например, на числовую прямую наудачу бросают точку. Вероятность того, что эта точка окажется левее точки с координатой 16, равна 0,88. Вероятность того, что эта точка окажется левее точки с координатой 14, равна 0,53. Найдите вероятность того, что точка будет принадлежать отрезку от 14 до 15.

Решение.Вычитая из вероятности P1 того, что, точка окажется левее точки с координатой 16 вероятность P2того, что, точка окажется левее точки с координатой 14, находим искомую вероятность P того, что, точка будет принадлежать отрезку от 14 до 15: P=P1-P2=0,88-0,53=0,35.

Ответ. 0,35.

## Сайт с видео решениями вероятностных задач, в том числе и задач В 10 ЕГЭ: <http://shpargalkaege.ru/EGEB14.shtml>

## Сайт с решением практически всех задач части В ЕГЭ 2013 года: [http://www.mathnet.spb.ru/](https://r.mail.yandex.net/url/Uwi3vgVBuebWO4bQg1Vzgg,1364708565/www.mathnet.spb.ru%2F)