

Международная научно-практическая конференция

«Первые шаги в науку»

Исследовательская работа по математике

по теме:

***«Способы решения алгебраических
уравнений»***

Предметная область: математика

Работу выполнили:

Капралова Ксения, Самошкина Татьяна, 10класс

Учитель: Голеницкая

Светлана Ивановна, учитель математики

Образовательное учреждение:

*МБОУ средняя школа №4 с углубленным изучением
отдельных предметов*

Брянск 2016

Содержание

Введение	3
1. Метод подбора корня по старшему и свободному коэффициенту. Понижение степени уравнения.	5
1.1. Теорема Безу. Следствия из теоремы Безу	5
1.2. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.	6
1.3. Схема Горнера.	7
2. Решение целых уравнений четвертой степени	8
2.1. Метод Феррари.	8
2.2. Решение уравнений четвертой степени, не содержащих одночлен третьей степени	10
3. Разложение на множители методом неопределенных коэффициентов.	11
4. Введение новых переменных.	12
4.1. Возвратные уравнения	14
4.2. Метод симметризации	15
4.3. Однородные уравнения	15
5. Использование свойств функций	16
Заключение	16
Список литературы.	17
Приложение. Упражнения для самостоятельного решения	18

Введение

Мне приходится делить время между политикой и уравнениями. Однако уравнения, по-моему гораздо важнее. Политика существует только для данного момента, а уравнения будут существовать вечно»

Альберт Эйнштейн

Актуальность темы

На протяжении всего школьного курса рассматривается множество способов решения алгебраических уравнений разного вида, разных степеней с применением основных определений, формул, теорем.

Опыт десятиклассника показывает, что встречаются уравнения, которые можно и нужно решать, используя нестандартные способы. Поиск и открытие путей нахождения корней уравнения – увлекательное занятие, особенно если одно и то же уравнение имеет несколько способов решения.

Но обычному школьнику трудно и почти невозможно найти учебное пособие или справочник, где собраны большинство необычных методов решения. Трудности и в том, что очень похожие по виду уравнения требуют разных методов решения.

Проблема: Поиск и систематизация нестандартных способов решения алгебраических уравнений.

Объектом исследования являются разные виды алгебраических уравнений, способы и методы их решения.

Цели:

обобщение и систематизация способов решения алгебраических уравнений, повышение уровня культуры решения математических задач, развитие навыков исследовательской работы

Задачи:

1. Изучить справочную и учебную литературу по способам решения алгебраических уравнений
2. Найти различные необычные способы решения уравнений, подобрать соответствующие примеры

3. Научиться применять нестандартные способы и методы решения уравнений

4. Составить справочное пособие по методам и способам решения алгебраических уравнений разных видов

5. Подготовка к олимпиадам различных уровней

Гипотеза: Возможна систематизация и обобщение необычных способов, которые можно применять для решения алгебраических уравнений в курсе средней школы.

Методы исследования: сбор информации, анализ и синтез, сравнение, обобщение, индукция/дедукция, прогнозирование, наблюдение, ранжирование

Этапы:

1. Изучение справочного, теоретического материала
2. Обобщение способов и методов решения алгебраических уравнений.
3. Подбор уравнений с использованием нестандартных методов.
4. Составление справочного пособия.

«Большинство жизненных задач решаются как алгебраические уравнения: приведением их к самому простому виду» писал Л.Н.Толстой.

Начнем с известных понятий и теорем, методов решения из курса алгебры 9-10 класса.

Основные определения

Алгебраическим уравнением называют уравнение вида $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ – многочлен степени $n \geq 1$.

Степенью алгебраического уравнения называют степень n многочлена $P_n(x)$.

Каждый корень уравнения является также корнем многочлена $P_n(x)$.

1. Метод подбора корня по старшему и свободному коэффициенту. Понижение степени уравнения.

Найти корни данным методом позволяет знание теоремы Безу и следствий из нее.

1.1. Теорема Безу: *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$.*

Следствия из теоремы Безу

1. *Число a – корень многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится без остатка на двучлен $x - a$.*

Отсюда, в частности, следует, что множество корней многочлена $P(x)$ тождественно множеству корней соответствующего уравнения $P(x) = 0$.

2. *Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами (если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни являются и целыми).*

3. *Пусть a – целый корень приведенного многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. Тогда для любого целого k число $P(k)$ делится на $a - k$.*

Теорема Безу дает возможность, найдя один корень многочлена, искать далее корни многочлена, степень которого уже на единицу меньше: если $P(a) = 0$, то заданный многочлен $P(x)$ можно представить в виде:

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

Таким образом, один корень найден и далее находятся уже корни многочлена $Q(x)$, степень которого на единицу меньше степени исходного

многочлена. Иногда этим приемом - он называется *понижением степени* - можно найти все корни заданного многочлена.

Примеры: 1) Решить уравнение $x^4+3x^3-13x^2-9x+30=0$.

Делители 30 : $\pm 1; \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10$.

$$(x-2)(x^3+5x^2-3x-15)=0$$

$$(x-2)(x+5)(x^2-3)=0$$

Ответ: $2, -5, \pm \sqrt{3}$.

2) Решить уравнение $x^6+x^5-7x^4-5x^3+16x^2+6x-12=0$.

Уравнение имеет не более 6 корней (по следствию 4).

Делители -12: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$.

$x=1$ - корень, следовательно

$$(x-1)(x^5+2x^4-5x^3-10x^2+6x+12)=0$$

Делители -12: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$.

При $x=-2$ равенство верно, следовательно имеем:

$$(x-1)(x+2)(x^4-5x^2+6)=0$$

$x^4-5x^2+6=0$ – биквадратное уравнение, его корни $x_{1,2}=\pm \sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm \sqrt{2}$.

Ответ: $\pm \sqrt{3}, \pm \sqrt{2}, 1, -2$.

1.2 Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.

Существует теорема, позволяющая находить рациональные корни алгебраического уравнения.

Теорема: Если рациональное число (несократимая дробь) $\frac{m}{n}$,

где m – число целое, а n – число натуральное, является корнем многочлена k -ой степени $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots + a_{k-1} x + a_k$, все коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$, которого являются целыми числами,

то числитель дроби m является делителем коэффициента a_k , а знаменатель дроби n является делителем коэффициента a_0 .

Коэффициент a_0 называют старшим коэффициентом многочлена, а коэффициент a_k – свободным членом многочлена.

Пример: Решить уравнение: $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$. Пусть $F(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

Выписываем возможные значения корней: $\pm 1; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}$.

Подстановкой убеждаемся, что $F(-1) = 0$, $F(3) = 0$ и $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Многочлен имеет три различных рациональных корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Корень $x = -1$ угадывается легко. Затем можно разложить на множители $F(x) = (x + 1) \cdot (2x^2 - 7x + 3)$ и искать корни квадратного трехчлена $2x^2 - 7x + 3$ обычными приемами.

Т.о. мы решили уравнение $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$. Ответ: $-1; \frac{1}{2}; 3$.

1.3. Схема Горнера.

Для вычисления коэффициентов частного и остатка от деления многочлена формула на линейный двучлен $x-s$ очень удобно использовать схему Горнера (иногда называют метод Горнера).

Заполняется таблица:

S_i	Коэффициенты многочлена				
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_0
s	$a_n \cdot b_n$	$a_{n-1} + b_n \cdot s = b_{n-1}$	$a_{n-2} + b_{n-1} \cdot s = b_{n-2}$...	$a_0 + b_1 \cdot s = b_0$

Полученные числа $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1$ являются коэффициентами частного от деления многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ на двучлен $x-s$, а b_0 – остатком. То есть,

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x-s)(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_1) + b_0$$

ча с т н о е о с т а т о к

Примеры: 1) Убедиться, что многочлен $2x^3 - 11x^2 + 12x + 9$ делится на двучлен $(x + \frac{1}{2})$

без остатка и найти частное.

Решить уравнение $2x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = 0$.

Решение:

S_i	Коэффициенты многочлена			
	2	-11	12	9
- $\frac{1}{2}$	2	$-11 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -12$	$12 + (-12) \cdot (-\frac{1}{2}) = 18$	$9 + 18 \cdot (-\frac{1}{2}) = 0$

$$2x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = (x + \frac{1}{2})(2x^2 - 12x + 18) = 2(x + \frac{1}{2})(x - 3)^2$$

Т.о. решено уравнение $2x^3 - 11x^2 + 12x + 9 = 0$. Ответ: $-\frac{1}{2}$; 3.

2) Решить уравнение $x^3 - 7x - 6 = 0$.

Решение: Если это уравнение имеет целые корни, то они находятся среди делителей свободного члена. Запишем эти делители 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6.

Проверим их по схеме Горнера.

x_i	Коэффициенты многочлена			
	$a_3=1$	$a_2=0$	$a_1=-7$	$a_0=-6$
1	1	$0+1*1=1$	$-7+1*1=-6$	$-6+(-6)*1=-12$
-1	1		$-7+(-1)*(-1)=-6$	$-6+(-6)*(-1)=0$

То есть, $x=1$ корнем не является,

$x=-1$ является корнем, и исходный многочлен представится в виде

$$x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6), \text{ значит } x_1=-1, x_2=3, x_3=-2 \text{ Ответ: } -1, 3, -2$$

2. Решение целых уравнений четвертой степени

2.1. Метод Феррари.

Метод решения уравнений четвертой степени нашел в XVI в. Лудовико Феррари, ученик Джероламо Кардано.

С помощью Метода Феррари можно решать уравнения четвертой степени вида

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

где a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 – произвольные вещественные числа, причем $a_0 \neq 0$.

Идея Феррари состояла в том, чтобы представить уравнение в виде $A^2 = B^2$, а потом решить два уравнения $A = B$ и $A = -B$.

Метод Феррари состоит из двух этапов.

На первом этапе уравнения приводятся к уравнениям четвертой степени вида $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, у которых отсутствует член с третьей степенью неизвестного px^3 с помощью подстановки $x = y - p/4$.

На втором этапе полученные уравнения решаются при помощи разложения на множители. Но для того, чтобы найти требуемое разложение на множители, приходится решать кубические уравнения.

ИТАК: Приведенное уравнение четвертой степени вида

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \text{ в общем случае, можно решить методом Феррари.}$$

Находится y_0 - любой из корней кубического уравнения следующего вида

$$y^3 - By^2 + (AC - 4D)y - A^2D + 4BD - C^2 = 0 \text{ (для этого можно применить способы, указанные выше)}$$

Затем решаются два квадратных уравнения

$$x^2 + \frac{A}{2}x + \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B + y_0\right)x^2 + \left(\frac{A}{2}y_0 - C\right)x + \frac{y_0^2}{4} - D} = 0, \text{ в которых}$$

подкоренное выражение является полным квадратом.

Корни этих уравнений являются корнями исходного уравнения четвертой степени.

Примеры: 1) Найти корни уравнения $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6 = 0$.

Имеем $A=3, B=3, C=-1, D=-6$.

Решим это уравнение по методу Феррари.

Составляем и решаем кубическое уравнение:

$$y^3 - By^2 + (AC - 4D)y - A^2D + 4BD - C^2 = 0$$

$$y^3 - 3y^2 + 21y - 19 = 0$$

Одним из корней полученного кубического уравнения является $y_0 = 1$, так как $1^3 - 3 \cdot 1^2 + 21 \cdot 1 - 19 = 0$.

$$x^2 + \frac{A}{2}x + \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B + y_0\right)x^2 + \left(\frac{A}{2}y_0 - C\right)x + \frac{y_0^2}{4} - D} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}\right)} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)^2} = 0$$

Получаем два квадратных уравнения

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 0$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + x - 2 = 0$$

В первом уравнении на множестве действительных чисел корней нет, корнями второго уравнения являются $x = 1$ и $x = -2$.

Ответ: 1 и -2.

2.2. Решение уравнений четвертой степени, не содержащих одночлен третьей степени

Метод Феррари наводит на мысль о том, что можно решить уравнение четвертой степени, не содержащее одночлен третьей степени следующим способом. Т.е. метод Феррари на практике выглядит так:

Уединяем x^4 , добавляем слагаемые с дополнительной переменной t к обеим частям уравнения таким образом, чтобы получить полный квадрат в левой части уравнения.

$$\text{Пример: } x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0, x^4 = 2x^2 + 8x + 3, x^4 + 2x^2t + t^2 = 2x^2 + 8x + 3 + 2x^2t + t^2 \\ (x^2 + t)^2 = x^2(2 + 2t) + 8x + (3 + t^2)$$

Для того, чтобы равенство выполнялось необходимо, чтобы и в правой части был квадрат, т. е. дискриминант квадратного трехчлена $D = 0$.

$$\frac{D}{4} = 16 - (2 + 2t)(3 + t^2) = -2t^3 - 2t^2 - 6t + 10$$

$$-2t^3 - 2t^2 - 6t + 10 = 0, t^3 + t^2 + 3t - 5 = 0, Q(t) = -t^3 + t^2 + 3t - 5.$$

Очевидно, что $Q(1) = 0$. Применяя схему Горнера, разложим на множители $Q(t)$: $(t-1)(t^2+2t+5)=0$, квадратный трехчлен t^2+2t+5 действительных корней не имеет, значит $t = 1$.

$$(x^2 + 1) = 4x^2 + 8x + 4$$

$$(x^2 + 1) = 4(x^2 + 2x + 1)$$

$$(x^2 + 1) = 4(x+1)^2, \text{ откуда } x^2 - 2x - 1 = 0. x = 1 \pm \sqrt{2}. \text{ Ответ: } x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

3. Разложение на множители методом неопределенных коэффициентов.

Этот метод состоит в том, что исходный многочлен раскладывается на множители с неизвестными коэффициентами. Используя свойство, что *многочлены равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях*, находят неизвестные коэффициенты разложения.

Пример: $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$.

Решение

Многочлен 3-й степени можно разложить в произведение линейного и квадратного множителей.

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x - a)(x^2 + bx + c),$$

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = x^3 + bx^2 + cx - ax^2 - abx - ac,$$

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = x^3 + (b - a)x^2 + (c - ab)x - ac.$$

Приравниваем коэффициенты, получаем систему:

$$\begin{cases} b - a = 4, \\ c - ab = 5, \\ -ac = 2, \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$\begin{cases} a = -1, \\ b = 3, \\ c = 2 \end{cases}, \text{ значит}$$

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 1)(x^2 + 3x + 2).$$

Корни уравнения $(x + 1)(x^2 + 3x + 2) = 0$ находятся легко.

Ответ: -1; -2.

4. Введение новой переменной:

Для упрощения уравнения (например - понижения степени) можно ввести новую переменную.

Метод введения новой переменной заключается в том, что для решения исходного уравнения вводят новую переменную (подстановку) t и получают новое уравнение. Затем решают новое уравнение, находят его корни. После этого возвращаются к замене и получают корни исходного уравнения.

. Замена переменной— очень удобный способ решения. Конечно, подходящую замену нужно «увидеть», а для этого необходимо накапливать опыт — только он поможет вам быстро найти наиболее удачный вид нового неизвестного.

Предлагаем несколько различных примеров (от простых к более интересным).

Примеры: 1) Решить уравнение $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0$.

Решим уравнение методом замены неизвестного

Пусть $x^2 + x + 1 = y$.

Преобразуем левую часть уравнения так:

$$(x^2 + x + 1)((x^2 + x + 1) + 1) - 12 = 0, (x^2 + x + 1)^2 + (x^2 + x + 1) - 12 = 0.$$

Тогда $y(y + 1) - 12 = 0$, $y^2 + y - 12 = 0$.

Это уравнение имеет корни $y_1 = -4$, $y_2 = 3$.

Если $y = 3$, то $x^2 + x + 1 = 3$, $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Если $y = -4$, то $x^2 + x + 5 = 0$. Это уравнение не имеет действительных корней. Ответ. -2 ; 1 .

2) Решить уравнение: $(x - 4)(x^2 + 15x + 50)(x - 2) = 18x^2$

Разложим на множители $x^2 + 15x + 50$.

$x^2 + 15x + 50 = 0$, $x_1 = -5$, $x_2 = -10$, тогда $x^2 + 15x + 50 = (x + 5)(x + 10)$.

Уравнение примет вид: $(x - 4)(x + 5)(x + 10)(x - 2) = 18x^2$

Так как $(-4) \cdot 5 = -20$, $10 \cdot (-2) = -20$, то перемножая первую скобку со второй, третью с четвертой, будем иметь: $(x^2 + x - 20)(x^2 + 8x - 20) = 18x^2$

Поскольку $x = 0$ не является корнем (это легко проверить), разделим обе части уравнения на x^2 .

Получим:
$$\frac{(x^2 + x - 20)}{x} \cdot \frac{(x^2 + 8x - 20)}{x} = \frac{18x^2}{x^2}$$

$$\left(x + 1 - \frac{20}{x}\right) \cdot \left(x + 8 - \frac{20}{x}\right) = 18$$

Вводим замену: $x - \frac{20}{x} = t$, тогда $(t+1)(t+8)=18$, т.е. $t^2+9t-10=0$, $t_1 = -10$, $t_2 = 1$.

Вернёмся к исходной переменной:

$$1) \quad x - \frac{20}{x} = -10; \quad 2) \quad x - \frac{20}{x} = 1.$$

Решим первое уравнение

$$x^2 + 10x - 20 = 0, \quad D = 180, \quad x_1 = \frac{-10 + \sqrt{180}}{2}; \quad x_2 = \frac{-10 - \sqrt{180}}{2}$$

Решим второе уравнение

$$x^2 - x - 20 = 0, \quad D = 81, \quad x_3 = -4, \quad x_4 = 5.$$

Ответ: $\frac{-10 + \sqrt{180}}{2}; \quad \frac{-10 - \sqrt{180}}{2}; \quad -4; 5.$

3) Решить уравнение: $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$

Замена: $x + \frac{1}{x} = z \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = z^2, \quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2,$

$$7z - 2\left(z^2 - 2\right) = 9 \Rightarrow 2z^2 - 7z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{5}{2} \\ z = 1 \end{cases}. \text{ Обратная замена: } \begin{cases} x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \\ x + \frac{1}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}, \text{ значит}$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0, \quad x^2 - x + 1 = 0, \quad D < 0 - \text{ корней нет. } \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2}; 2.$$

4) $3 * \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{2x^2 + x + 2}{x^2 - x + 1}$. Решение:

Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на x ($x \neq 0$)

$$3 \frac{x + \frac{1}{x} + 3}{x + \frac{1}{x} + 1} = \frac{2(x + \frac{1}{x}) + 1}{x + \frac{1}{x} - 1}. \quad \text{Пусть } x + \frac{1}{x} = t, \text{ тогда } 3 \frac{t+3}{t+1} = \frac{2t+1}{t-1}, \text{ где } t \neq \pm 1$$

$t^2+3t-10=0$, откуда $t=-5$ и $t=2$. Следовательно $x + \frac{1}{x} = -5$ или $x + \frac{1}{x} = 2$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}, \quad x_3 = 1 \quad \text{Ответ: } \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}, 1.$$

4.1. Возвратные уравнения

Отдельный вид уравнений, которые можно с помощью замены свести к квадратному, — так называемые **возвратные уравнения**, а именно уравнения вида: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$, где числа a, b, d и f не равны нулю

и выполняется равенство: $\frac{a}{f} = \left(\frac{b}{d}\right)^2$.

Пример: 5) $6x^4 - 13x^3 - 57x^2 - 39x + 54 = 0$.

Решение. Убедимся, что перед нами возвратное уравнение:

$$\frac{-13}{-39} = \frac{1}{3}, \quad \frac{6}{54} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

Так как $x = 0$ не является решением уравнения, разделим обе его части на x^2 :

$$6x^2 - 13x - 57 - \frac{39}{x} + \frac{54}{x^2} = 0 \quad \text{и перегруппируем слагаемые так:}$$

$$6\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{3}{x}\right) - 57 = 0. \quad \text{Пусть } t = x + \frac{3}{x}. \text{ Тогда}$$

$$t^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = x^2 + \frac{9}{x^2} + 6, \quad \text{следовательно, } t^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = x^2 + \frac{9}{x^2} + 6,$$

и для t получаем уравнение: $6(t^2 - 6) - 13t - 57 = 0$, или $6t^2 - 13t - 93 = 0$,

$$\text{откуда } t_1 = -3, \quad t_2 = \frac{31}{6}. \quad x + \frac{3}{x} = -3, \quad x^2 - 3x + 3 = 0, \quad D < 0, \quad \text{значит корней нет}$$

$$x + \frac{3}{x} = \frac{31}{6}, \quad 6x^2 - 31x + 18 = 0, \quad x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{9}{2}. \quad \text{Ответ: } x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{9}{2}$$

6) Пример уравнения вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, в котором коэффициенты членов уравнения, одинаково отстоящих от начала и конца, равны $3x^4 - 2x^3 - 31x^2 + 10x + 75 = 0$

$$3\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{5}{x}\right) - 31 = 0$$

Пусть $y = x - \frac{5}{x}$, тогда $y^2 = x^2 - 10 + \frac{25}{x^2}$, $x^2 + \frac{25}{x^2} = y^2 + 10$.

$3(y^2 + 10) - 2y - 31 = 0$, откуда $3y^2 - 2y - 1 = 0$, где $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{3}$.

Следовательно $x - \frac{5}{x} = 1$, $x^2 - x - 5 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$ или $x - \frac{5}{x} = -\frac{1}{3}$, $3x^2 -$

$x - 15 = 0$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{181}}{6}$

Ответ: $\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{181}}{6}$.

4.2. Метод симметризации

Уравнения, которые имеют вид $(x + a)^n + (x + b)^n = c$, решаются подстановкой $t = x + \frac{a+b}{2}$. Этот метод называется **методом симметризации**.

Примером такого уравнения может быть уравнение вида

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c.$$

$$\text{б) } (x + 3)^4 + (x + 1)^4 = 272.$$

Делаем подстановку, о которой говорилось выше:

$$t = x + (3 + 1)/2 = x + 2, \text{ после упрощения: } x = t - 2.$$

$$(t - 2 + 3)^4 + (t - 2 + 1)^4 = 272.$$

$$(t + 1)^4 + (t - 1)^4 = 272.$$

Убрав скобки с помощью формул, получим:

$$t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 + t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 272.$$

$$2t^4 + 12t^2 - 270 = 0. \quad t^4 + 6t^2 - 135 = 0. \quad t^2 = 9 \text{ или } t^2 = -15.$$

Второе уравнение корней не дает, а вот из первого имеем $t = \pm 3$.

После обратной замены получим, что $x = -5$ или $x = 1$. Ответ: -5; 1.

4.3. Однородные уравнения

7) Пример однородного уравнения: $(x^2+2x)^2-(x+2)(2x^2-x)=6(2x-1)^2$.

$$(x^2+2x)^2-(x+2)x(2x-1)=6(2x-1)^2.$$

Введем две переменные $x^2+2x=u$, $2x-1=v$, тогда $u^2-uv-6v^2=0$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 - \left(\frac{u}{v}\right) - 6 = 0, \text{ откуда } \frac{u}{v} = 3 \text{ или } \frac{u}{v} = -2$$

Тогда $u=3v$, $x^2+2x=3(2x-1)$, $x_1=1$, $x_2=3$

или $u=-2v$, $x^2+2x=-2(2x-1)$, $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{7}$.

Ответ: 1, 3, $-3\pm\sqrt{7}$.

5. Использование свойств функций

В некоторых случаях решение алгебраических уравнений значительно упрощается, если использовать свойства функций.

Пример: Решим уравнение $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^3 + 3x - 4$, которая представлена в виде суммы двух функций $y = x^3$ и $y = 3x - 4$.

Обе функции определены на множестве \mathbb{R} и являются возрастающими.

Следовательно, их сумма – возрастающая функция.

А так как всякая монотонная функция каждое своё значение может принимать лишь при одном значении аргумента, то и значение, равное нулю, она может принимать лишь при одном значении x .

Значит, такое уравнение имеет не более одного действительного корня.

Испытывая делители свободного члена (± 1 , ± 2 и ± 4), находим, что $x = 1$.

Ответ. $x = 1$

Заключение

Изучив многочисленные учебные и справочные пособия, источники из Интернета по теме «Способы решения алгебраических уравнений», мы научились решать алгебраические уравнения различными нестандартными

методами, систематизировали и обобщили эти методы, подобрали примеры с применением изученных способов.

Изучая источники по этой теме мы убедились, что некоторые из них можно решить сразу несколькими путями, выбирая из них более рациональный и занимающий меньшее время, что немаловажно при выполнении заданий как на ЕГЭ, так и на олимпиадах.

В процессе работы над темой у нас заметно усовершенствовались умения и навыки работы с научно-популярной литературой, интернет-источниками, с продуктами Microsoft Office.

Мы надеемся, что составленный нами справочный материал может быть использован при чтении лекций, подготовке к урокам по математике учащимся и учителям

Работа над темой «Способы решения уравнений» нами не закончена, т.к. впереди поиск необычных способов решения уравнений других видов, а также неравенств и систем.

Цель следующего этапа работы - обобщение и систематизация методов и способов решения иррациональных, показательных и логарифмических уравнений..

Список литературы и Интернет- ресурсов

1. Алгебра и начала математического анализа, 10 класс: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни. Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин - М.: Просвещение, 2010
2. Математика. Тренировочные задания повышенной сложности с ответами для подготовки к ЕГЭ и к другим формам выпускного и вступительного экзаменов. Г. И. Ковалева, Т. И. Кутузова: Изд. «Учитель», 2005
3. Уравнения и неравенства. Нестандартные способы решения: справочник. С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко: Изд «Наука», 1997
4. Сборник задач по алгебре и началам математического анализа, 10 класс. Е. П. Нелин, А. Н. Рогаткин, Е. Д. Куланин, С. Н. Федин. – М.: Илекса, 2014
5. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. А. Г. Цыпкин, Н. Г. Пинский. М. – Наука, 1989

6. <http://matuha.ru/>
7. www.algebraclass.ru
8. <http://www.vevivi.ru>
9. <http://edu.alnam.ru>.
10. <http://www.resolventa.ru>
11. <http://www.studfiles.ru>

Приложение.

Упражнения для самостоятельного решения.

Для решения по методу Феррари

1) $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 20x - 5 = 0$ (в общем виде)

Ответ: $-\sqrt{5}, \sqrt{5}, -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}$.

2) $x^4 - 10x^2 - 8x + 5 = 0$ Ответ: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$ и $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$

Для решения с использованием метода неопределенных коэффициентов.

1) $x^4 + x^3 - 4x^2 - 9x - 3 = 0$. Ответ: $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

2) $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0$ Ответ: $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Для решения с помощью монотонности функций.

1) $5x^{19} + 4x^3 + 3x - 12 = 0$ Ответ: $x = 1$

2) $2x^{15} + 3x = \frac{5}{x}$. Ответ: ± 1 .

3) $x^5 + x^3 + 2x - 4 = 0$. Ответ: 1 .

Для решения с использованием теоремы Виета

$x^3 - 8x^2 + 40 = 0$ Ответы: $-2,5 \pm \sqrt{5}$

Возвратные уравнения:

$x^4 - 5x^3 + 10x + 4 = 0$

$$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$$

$$x^4-2x^3-11x^2+12x+36=0$$

$$2x^4-x^3-7x^2-2x+8=0 \text{ (ответы найдите самостоятельно)}$$

Однородные уравнения:

$$(x+5)^4-13x^2(x+5)^2+36x^4=0$$

$$2(x-1)^2-5(x^2-3x+2)+2(x-2)^2=0$$

$$2(x^2+x+1)-7(x-1)^2=13(x^3-1)$$

$$3(x+2)^2+2(x^2-2x+4)^2=5(x^3+8) \text{ (ответы найдите самостоятельно)}$$