

Методическая разработка:

**Тригонометрические уравнения,
связанные с отбором корней**

Выполнила: учитель математики

МБОУ «СОШ №17» г. Чебоксары ЧР

Мартынова Валентина Валериановна

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Введение..... | 3 |
| 1. Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях..... | 6 |
| 1.1. Арифметический способ..... | 6 |
| 1.2. Алгебраический способ..... | 7 |
| 1.3. Геометрический способ..... | 9 |
| 1.4. Функционально-графический способ..... | 11 |
| 2. Отбор общих корней в нескольких сериях решений тригонометрического уравнения..... | 11 |
| 3. Отбор корней уравнения, удовлетворяющих дополнительным условиям..... | 13 |
| 3.1 Корни уравнения принадлежат промежутку..... | 13 |
| 3.2 Корни уравнения удовлетворяют неравенству..... | 15 |
| 4. Отбор корней уравнения, связанный с методом замены..... | 16 |
| 5. Уравнения, содержащие дробные выражения..... | 16 |
| 6. Уравнения, содержащие иррациональные выражения..... | 17 |
| 7. Уравнения, содержащие показательные выражения..... | 19 |
| 8. Уравнения, содержащие логарифмические выражения..... | 19 |
| 9. Уравнения, содержащие модули..... | 20 |
| 10. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические выражения.. | 22 |
| Заключение..... | 23 |
| Список и источники литературы..... | 24 |

Введение

Решение тригонометрических уравнений – один из интереснейших и одновременно трудных моментов школьного курса математики. Решение тригонометрического уравнения требует владения рядом умений и навыков, среди которых - умение отбирать корни в соответствии с наложенными условиями.

Среди разделов школьной математики тригонометрия занимает особое место. Традиционно этот раздел считается трудным и для изложения учителем и для усвоения учеником. Это один из разделов, изучение которого зачастую воспринимается многими как «математика ради математики», не имеющая практической ценности. Между тем тригонометрический аппарат используется во многих приложениях математики. В школьном курсе этот аппарат находится на пересечении алгебры и геометрии. То есть оперирование тригонометрическими функциями необходимо для реализации внутри - и межпредметных связей в обучении математике.

Заметим, что тригонометрический материал создает благодатную почву для формирования различных метапредметных умений. Например, обучение отбору корней тригонометрического уравнения позволяет формировать умение, связанное с поиском решений, удовлетворяющих заданным условиям.

Тригонометрические уравнения, связанные с отбором корней, из года в год встречаются среди заданий ЕГЭ по математике. Что же нужно знать и уметь для успешного выполнения таких заданий? Это:

1. Понимать, «уметь» читать числовую окружность;
2. Знать определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса;
3. Знать таблицу значений тригонометрических функций основных аргументов и аргументов первой четверти;
4. Используя числовую окружность, уметь читать и применять свойства тригонометрических функций (знаки, четность, периодичность, формулы симметричных точек);

5. Уметь решать простейшие тригонометрические уравнения по формулам и с использованием числовой окружности;
6. Уметь решать простейшие тригонометрические неравенства с использованием числовой окружности;
7. Знать основные тригонометрические формулы, формулы двойных аргументов;
8. Знать основные методы решения тригонометрических уравнений (замена, разложение на множители);
9. Уметь отбирать корни согласно условию задачи.

Целью данной работы является рассмотрение различных способов и приемов, позволяющих осуществить отбор корней при решении тригонометрических уравнений, продемонстрировать их на примере заданий, входящих в банк заданий единого государственного экзамена по математике.

При решении различных уравнений школьникам приходится сталкиваться с понятием «посторонних» корней, появляющихся в результате неравносильных преобразований как отдельных выражений, входящих в уравнение, так и самого уравнения. Преобразование тригонометрического уравнения может привести не только к равносильному уравнению, но и к уравнению-следствию. Если на каком-то шаге мы перешли к уравнению, про которое точно знаем, что оно – следствие исходного, то, найдя корни нового уравнения, необходимо сделать проверку (например, подставив найденные значения в исходное уравнение).

Однако следует иметь в виду, что проверка путем подстановки найденных значений в тригонометрическое уравнение в большинстве случаев сопряжена с техническими трудностями. Если сомнение в равносильности первого и последнего в цепочке преобразований уравнения вызвано расширением в ходе преобразований области допустимых значений, лучше начать решение с записи ограничений, определяющих область допустимых значений исходного

уравнения, и, найдя корни последнего уравнения, проверить, удовлетворяют ли они этим ограничениям.

Причиной расширения области допустимых значений тригонометрического уравнения может быть также использование некоторых тригонометрических формул. В первую очередь следует обратить внимание на формулы, выражающие синус, косинус, тангенс или котангенс угла через тангенс половинного угла. Использование этих формул может привести к сужению области допустимых значений и, как следствие, к потере корней. Применение тех же формул в обратном направлении, напротив, может привести к расширению области допустимых значений и, как следствие, к появлению посторонних корней. Сказанное относится также к формулам тангенса суммы и разности аргументов.

Также к появлению посторонних корней может привести использование формул $\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = \sin \alpha$ или $\operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha = \cos \alpha$.

Решение тригонометрических уравнений, связанных с отбором корней, имеет отличие от ситуаций, возникающих при решении дробно - рациональных, иррациональных, логарифмических и других уравнений, состоящее в том, что при решении простейших тригонометрических уравнений получают бесконечные серии решений, зависящих от целочисленного параметра. Еще одной спецификой тригонометрических уравнений является неединственность формы записи ответа. В большинстве учебников для записи решений простейших уравнений используются следующие формулы:

| Вид уравнения | Общая формула решений |
|-------------------------------------|---|
| $\sin x = a, \forall a \in [-1; 1]$ | $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| $\cos x = a, \forall a \in [-1; 1]$ | $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{tg} x = a$ | $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{ctg} x = a$ | $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ |

Использование общей формулы серий решений не всегда является удобной при отборе корней, в частности, на числовой окружности. В этом случае удобнее представлять их совокупностью.

| Вид уравнения | Совокупность решений уравнения |
|-------------------------------------|---|
| $\sin x = a, \forall a \in [-1; 1]$ | $x = \begin{cases} \arcsin a + 2\pi n, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z}$ |
| $\cos x = a, \forall a \in [-1; 1]$ | $x = \begin{cases} \arccos a + 2\pi n, \\ -\arccos a + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{tg} x = a$ | $x = \begin{cases} \operatorname{arctg} a + 2\pi n, \\ \pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z}$ |
| $\operatorname{ctg} x = a$ | $x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} a + 2\pi n, \\ \pi + \operatorname{arcctg} a + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z}$ |

1. Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

При отборе корней в процессе решения тригонометрических уравнений обычно используют один из следующих способов.

1.1. Арифметический способ

а) непосредственная подстановка полученных корней в уравнение и имеющиеся ограничения;

В случае непосредственной подстановки серий полученных решений для удаления «посторонних» решений полезным оказывается использование формул приведения. В частности,

$$\sin(x + \pi k) = \begin{cases} \sin x, & \text{при } k = 2n, \\ -\sin x, & \text{при } k = 2n + 1, \end{cases} n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos(x + \pi k) = \begin{cases} \cos x, & \text{при } k = 2n, \\ -\cos x, & \text{при } k = 2n + 1, \end{cases} n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1. Найти корни уравнения $\cos x = 0,5$, удовлетворяющие неравенству $\sin x \leq 0$.

Решение. Из уравнения $\cos x = 0,5$ получаем
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

Проверим для полученных значений x выполнение условия $\sin x \leq 0$. Для первой серии получаем $\sin(\frac{\pi}{3} + 2\pi n) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$. Следовательно, первая серия является «посторонней». Для второй серии получаем $\sin(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней приходится выполнять в случаях, когда требуется отобрать корни, принадлежащие заданному промежутку или некоторому условию.

Пример 2. Решить систему
$$\begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Наименьший общий положительный период функций $\cos x$ и $\sin 3x$ равен 2π , поэтому достаточно рассмотреть решения системы на промежутке

$[0; 2\pi)$. Из уравнения $\sin 3x = 0$ получаем $x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Подставляя поочередно значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 для переменной k , найдем корни $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3},$

$\pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, содержащиеся на промежутке $[0; 2\pi)$. Среди полученных решений отбираем те, для которых справедливо неравенство $\cos x \geq 0$. Остаются числа $0, \frac{\pi}{3} \text{ и } \frac{5\pi}{3}$. Следовательно, исходная система имеет множество решений вида $x = \pi n, \quad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

1.2. Алгебраический способ

Алгебраический способ отбора корней наиболее удобен в тех случаях, когда последовательный перебор значений параметров приводит к вычислительным трудностям, промежуток для отбора корней большой, значения обратных тригонометрических функций, входящих в серии решений, не являются табличными, и при решении задач с дополнительными условиями.

а) решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;

Пример 3. Найти все решения совокупности уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = 0,5, \end{cases} \text{ принадлежащие промежутку } \left[-\pi; \frac{3\pi}{4} \right].$$

Решение. 1. $\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Так как решения должны удовлетворять неравенству $-\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq \frac{3\pi}{4}$, то получим $-1 \leq \frac{1}{2} + n \leq \frac{3}{4}$ или $-\frac{3}{2} \leq n \leq \frac{1}{4}$. С учетом того, что $n \in \mathbb{Z}$, получаем два значения $n = -1$ и $n = 0$. Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{2}$. Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2}$.

$$2. \quad \sin x = 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

Так как должно выполняться условие $-\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$, то для первой серии имеем

$$\Leftrightarrow -\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq \frac{3\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \frac{1}{6} + 2n \leq \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-7}{12} \leq n \leq \frac{7}{24} \quad \Leftrightarrow \quad n = 0.$$

Отсюда получаем $x = \frac{\pi}{6}$. Для второй серии имеем $-\pi \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq \frac{3\pi}{4} \quad \Leftrightarrow$

$$-1 \leq \frac{5}{6} + 2n \leq \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-11}{12} \leq n \leq -\frac{1}{24}.$$

Последнее неравенство не имеет целочисленных решений.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$

б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

Пример 4. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \sin \frac{5x}{2} = 1. \end{cases}$$

Решение. Получаем решения системы

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \sin \frac{5x}{2} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi m}{5}, n, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Найдем такие целые значения n и m , при которых решения в полученных сериях совпадают, т.е. приравнявая выражения для x в обеих сериях, получим

$$\pi n = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi m}{5} \quad \text{и л и} \quad 5n = 1 + 4m. \quad \text{Отсюда} \quad 4m = 5n - 1 \text{ или } m = \frac{5n - 1}{4},$$

$m = n + \frac{n - 1}{4}$. Для существования целых решений число $\frac{n - 1}{4}$ должно быть

целым. Обозначим его буквой k , тогда $\frac{n - 1}{4} = k$ или $n = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$m = \frac{5n - 1}{4} = \frac{20k + 4}{4} = 5k + 1, k \in \mathbb{Z}.$$

Подставляя $n = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$, в первую серию решений или $m = 5k + 1, k \in \mathbb{Z}$, во вторую, получим общее решение $x = \pi(4k + 1), k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi(4k + 1), k \in \mathbb{Z}$.

1.3. Геометрический способ

В последние годы в учебниках используются разные модели к иллюстрации решения простейших тригонометрических уравнений или неравенств: с применением тригонометрического круга или графика простейшей тригонометрической функции. В первом случае изображение решений связано с числовой окружностью, во втором – с числовой прямой.

а) изображение корней на тригонометрической окружности с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений;

Тригонометрическую окружность удобно использовать при отборе корней на промежутке, длина которого не превосходит 2π , или в случае, когда

значения обратных тригонометрических функций, входящих в серию решений, не являются табличными.

Пример 5. Найти решения совокупности уравнений
$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 5x = 0. \end{cases}$$

Решение. Из совокупности уравнений имеем:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 5x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5} \end{cases} n, k \in \mathbb{Z}.$$

Функции $\cos x$ и $\cos 5x$, входящие в совокупность уравнений, имеют общий наименьший положительный период 2π . Поэтому отбор корней удобно проводить на числовой окружности, при этом используя градусную меру полученных решений $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ или $x = 18^\circ + n \cdot 36^\circ$. Из рисунка видно, что вторая серия решений включает в себя первую серию решений.



Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$

б) изображение корней на числовой прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений.

Тригонометрическую окружность удобно использовать для изображения точек вида $\alpha + \beta n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $2\pi : \beta$ – натуральное число. Например, множеству чисел $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, на окружности соответствуют $2\pi : \frac{\pi}{3} = 6$ точек. С другой стороны, числа вида $\frac{1}{4} + 3n, n \in \mathbb{Z}$, целесообразнее отмечать на координатной прямой, так как число 2π не соизмеримо с числом 3, и на

окружности будет бесконечное множество точек. Еще одна причина выбора числовой прямой связана с периодами функций превосходящих 2π .

Пример 6. Решить систему
$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \sin \frac{x}{3} \neq 0. \end{cases}$$

Решение. Из условия получаем

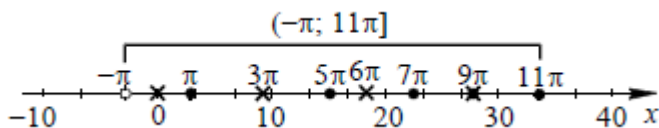
$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \sin \frac{x}{3} \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}. \\ x \neq 3\pi n \end{cases}$$

Основной период функций, входящих в систему

$$T\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 4\pi, \quad T\left(\sin \frac{x}{3}\right) = 6\pi.$$

Общий наименьший положительный период функций равен 12π .

На числовой прямой рассмотрим промежуток $(-\pi; 11\pi]$. Отметим черными точками числа $-\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi, 11\pi$, соответствующие формуле $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Крестиками отметим числа $0, 3\pi, 6\pi, 9\pi$, соответствующие формуле $x \neq 3\pi n, n \in \mathbb{Z}$.



Ответ: $\pi + 6\pi n, 5\pi + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

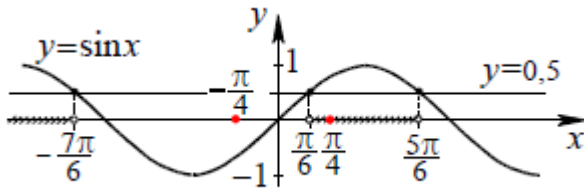
1.4. Функционально-графический способ

При изображении решений простейших тригонометрических неравенств иногда используют графики простейших тригонометрических функций. Для нахождения решения тригонометрического неравенства при этом подходе требуется схематичное построение графика простейшей тригонометрической функции и применение формул корней соответствующих уравнений.

Пример 7. Решить систему
$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$



Из рисунка видно, что на промежутке $\left[\frac{-7\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$, длина которого 2π , нера-

венству $\sin x > \frac{1}{2}$ удовлетворяет одно число $\frac{\pi}{4}$. Следовательно, все числа

вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2. Отбор общих корней в нескольких сериях решений тригонометрического уравнения

Пример 8. Решить уравнение: $\cos x + \cos 3x = 2$.

Решение. Из неравенств $|\cos x| \leq 1$ и $|\cos 3x| \leq 1$ следует, что равенство возможно только в том случае, когда оба слагаемых одновременно будут равны 1.

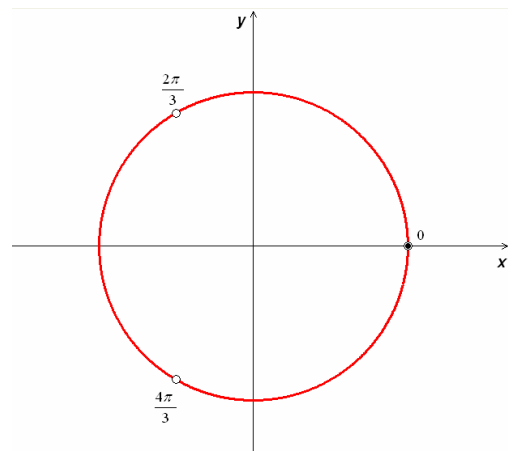
Вторая серия решений включает первую серию, поэтому имеем решение системы

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Пример 9. Решить уравнение:

$$\sin 7x \cos 4x = -1.$$



Решение. Воспользовавшись формулой преобразования произведения синуса и косинуса в сумму, приводим уравнение к виду $\sin 11x + \sin 3x = -2$.

Равенство может выполняться в том и только в том случае, когда

$$\begin{aligned} \sin 11x &= -1 \\ \sin 3x &= -1 \\ x &= -\frac{\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11} \\ x &= -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3} \\ n, m &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Найдем такие целые значения n и m , при которых решения в полученных се-

риях совпадают $-\frac{\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11} = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}$, т.е. $3n = -2 + 11m$. Выражая из послед-

него равенства n , получаем $n = 3m + \frac{2m-2}{3}$. Так как n – целое, то последнее равенство возможно, только если $2m - 2$ делится на 3, т.е. $2m - 2 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отсюда $m = 1 + k + \frac{k}{2}$. Поскольку m должно быть целым, то k должно быть

четным. Если $k = 2p$, где $p \in \mathbb{Z}$, то $m = 1 + 2p + \frac{2p}{2} = 3p + 1$. Следовательно-

но, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(3p+1)}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi p$. **Ответ:**

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi p, p \in \mathbb{Z}$$

3. Отбор корней уравнения, удовлетворяющих дополнительным условиям

3.1. Корни уравнения принадлежат промежутку

Пример 10. Найти все решения уравнения $\sin 2x = \cos x$, принадлежащие

промежутку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Приведем уравнение к виду $\cos x(2\sin x - 1) = 0$. Отсюда получаем два уравнения $\cos x = 0$ или $2\sin x = 1$.

$$1) \text{ Если } \cos x = 0, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Отберем корни, принадлежащие указанному в условии промежутку.

$$\text{Если } n=0, \text{ то } x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$\text{Если } n=1, \text{ то } x = \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$\text{Если } n=-1, \text{ то } x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$\text{Если } n=-2, \text{ то } x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Отберем в полученных сериях корни, принадлежащие указанному в условии промежутку.

$$\text{Если } n=0, \text{ то } x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \text{ или } x = \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$\text{Если } n=1, \text{ то для первой серии решений } x = \frac{13\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$\text{Если } n=-1, \text{ то } x = -\frac{11\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \text{ или } x = -\frac{7\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Замечание. Другой вариант отбора корней можно провести на тригонометрическом круге, учитывая, что общий наименьший положительный период функций $\sin x$ и $\cos x$, входящих в уравнение, равен 2π .

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$.

Пример 11. Найти все решения уравнения $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1$, принадлежащие отрезку $[1; 2]$.

Решение. Воспользуемся формулами понижения степени и преобразования суммы функций в произведение.

$$\begin{aligned} \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1 &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases} \begin{matrix} [k \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}. \\ [k \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{matrix} \\ \Leftrightarrow 2 \cos 5x \cos x = 0 &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Решим двойное неравенство

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} \leq 2 &\Leftrightarrow 10 \leq \pi + 2\pi k \leq 20 \Leftrightarrow 10 - \pi \leq 2\pi k \leq 20 - \pi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{10 - \pi}{2\pi} \leq k \leq \frac{20 - \pi}{2\pi} &\Leftrightarrow \frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{10}{\pi} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} > \frac{5}{3,2} - \frac{1}{2} = \frac{17}{16}$, $\frac{10}{\pi} - \frac{1}{2} \leq \frac{10}{3} - \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$ и $k \in \mathbb{Z}$, то $k = 2$.

Отсюда $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Пример 12. Указать количество корней уравнения

$$\operatorname{ctg} 3x \sin 6x - \cos 6x - \cos 12x = 0 \quad \text{на промежутке } [0; 2\pi].$$

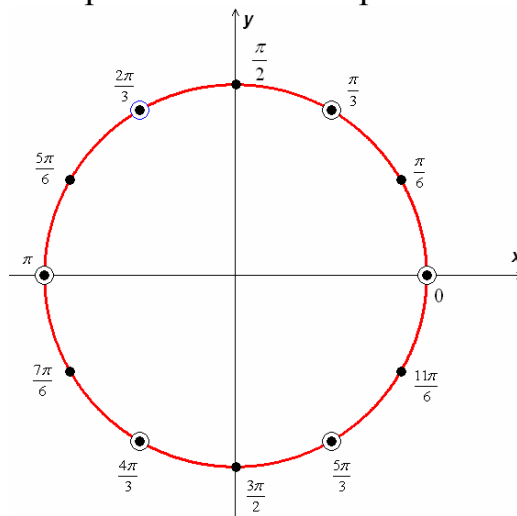
Решение. Умножая обе части уравнения на $\sin 3x \neq 0$, получаем:

$$\sin 3x - \sin 3x \cos 12x = 0, \quad \sin 3x(1 - \cos 12x) = 0.$$

$$\begin{aligned} \cos 12x &= 1, \\ \sin 3x &\neq 0, \\ x &= \frac{\pi n}{6}, \\ x &\neq \frac{\pi k}{3}, \\ n, k &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Отсюда получаем

Проведем отбор корней, используя тригонометрическую окружность. Для этого полученные значения в серии решений и серии ограничений изобразим на тригонометрической окружности и в ответ запишем количество не совпавших в обеих сериях значений переменной x .



Ответ: 6.

3.2. Корни уравнения удовлетворяют неравенству

Пример 13. Найти все корни уравнения

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0, \text{ удовлетворяющих неравенству } \cos x > 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{-1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{-5\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k. \end{array} \right. \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Изобразим полученные решения на тригонометрической окружности. Каждому уравнению соответствуют две точки на тригонометрической окружности. В ответ запишем только решения, расположенные на дуге окружности, соответствующей неравенству $\cos x > 0$, т.е. лежащие в I и IV четвертях.

Следовательно, данному условию удовлетворяют решения:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ или } -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n, k \in \mathbb{Z}$.

4. Отбор корней уравнения, связанный с методом замены

Пример 14. Решить уравнение: $2\sin^4 x - \sin^2 x - 1 = 0$.

Решение. Обозначим $\sin^2 x = t$, где $0 \leq t \leq 1$. Тогда получим квадратное уравнение $2t^2 - t - 1 = 0$, которое имеет корни $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$ (не удовлетворяет условию $0 \leq t \leq 1$). Для уравнения $\sin^2 x = 1$ имеем $\frac{1 - \cos 2x}{2} = 1$, $\cos 2x = -1$.

Отсюда $2x = \pi + 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 15. Решить уравнение: $\arccos^2 x - 8\arccos x + 15 = 0$.

Решение. Обозначим $\arccos x = t$. Так как множество значений функции $\arccos x$ – отрезок $[0; \pi]$, найдем решения уравнения $t^2 - 8t + 15 = 0$, удовлетворяющие условию $0 \leq t \leq \pi$. Такой корень один: $t = 3$. Если $t = 3$, то $\arccos x = 3$, откуда $x = \cos 3$.

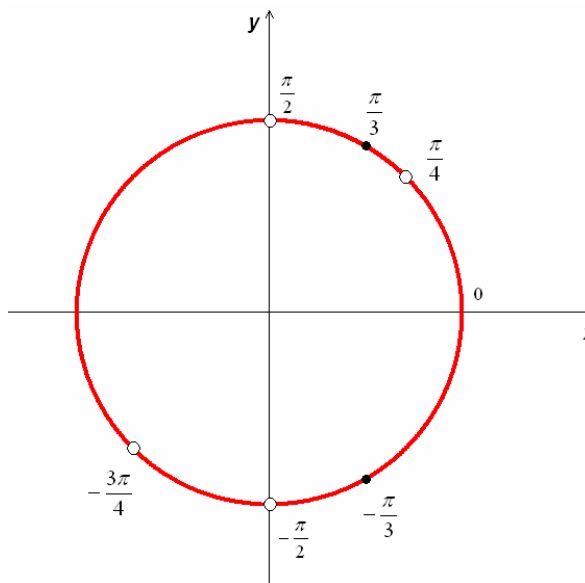
Ответ: $\cos 3$.

5. Уравнения, содержащие дробные выражения

Пример 16. Решить уравнение $\frac{\cos 2x - \cos x + 1}{\tan x - 1} = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{aligned}
 & \frac{x-1}{2 \cos x} = 0, \\
 & \cos x = \frac{1}{2}, \\
 & \cos x \neq 0, \\
 & \operatorname{tg} x \neq 1, \\
 & \cos 2x - \cos x + 1 = 0, \\
 & \cos x \neq 0, \\
 & \operatorname{tg} x - 1 \neq 0, \\
 & x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\
 & x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\
 & x \neq \frac{\pi}{4} + \pi m, \\
 & n, m, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Пример 17. Решить уравнение $6 \sin x \cos x + \sin 2x \sin \frac{x}{2} = 0.$

Решение. Применим формулу синуса двойного аргумента

$$3 \sin 2x + \sin 2x \sin \frac{x}{2} = 0, \quad 3 + \sin \frac{x}{2} = 0. \quad \text{Так как } 3 + \sin \frac{x}{2} > 0, \quad \text{то последнее уравнение равносильно системе}$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \quad x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Ответ: $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$

6. Уравнения, содержащие иррациональные выражения

Пример 18. Решить уравнение $\sqrt{5 \cos x - \cos 2x} + 2 \sin x = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{5 \cos x - \cos 2x} = -2 \sin x$. Это уравне-

ние равносильно системе
$$\begin{cases} 5 \cos x - \cos 2x = 4 \sin^2 x, \\ \sin x \leq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение системы:

$$5 \cos x - (2 \cos^2 x - 1) = 4(1 - \cos^2 x),$$

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x - 1 = 0.$$

Отсюда $\cos x = \frac{1}{2}, \cos x = -3$ (нет корней). Из уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ получаем две

серии решений $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ или $x = \frac{-\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Проверим для полученных значений x выполнение условия $\sin x \leq 0$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0;$$

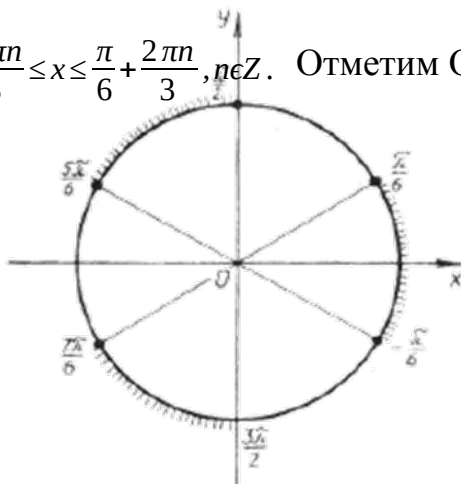
$$\sin\left(\frac{-\pi}{3} + 2\pi n\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 19. Найти все решения уравнения $\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2} \cos 3x = 0$, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Найдем ОДЗ: $\cos x \geq 0$. Отсюда $\frac{-\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$\frac{-\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$. Отметим ОДЗ на тригонометрическом круге.



Отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежит только один промежуток из ОДЗ, а именно

$\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Решим уравнение и выберем корни, принадлежащие этому про-

межутку: $1 + \sin 2x = 2\cos^2 3x \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 6x$,

$$\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = 0 \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 4x - \frac{\pi}{4} = \pi k, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \\ x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4} \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Из серии $x_1 = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ при $n=2$ имеем $x = \frac{11\pi}{8} \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Из серии $x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$ при $k=5$ имеем $x = \frac{21\pi}{16} \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: $\frac{11\pi}{8}$; $\frac{21\pi}{16}$.

7. Уравнения, содержащие показательные выражения

Пример 20. Решить уравнение $\frac{(3^{\cos x})^{\cos x}}{(\sqrt{3})^{\sqrt{3}\cos x}} = \sqrt{27}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение

$$3^{\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x} = 3^{\frac{3}{2}}, \quad \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{3}{2} = 0.$$

Обозначив $\cos x = t$, где $-1 \leq t \leq 1$, получим квадратное уравнение

$2t^2 - \sqrt{3}t - 3 = 0$, которое имеет корни $t_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2}, t_2 = \sqrt{3}$ (не удовлетворяет условию $-1 \leq t \leq 1$). Выполнив обратную замену, из уравнения $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ получаем $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 21. Решить уравнение $\cos\left(22\pi - \frac{13x}{4}\right) = 3^{\sqrt{x}}$.

Решение. Так как $\sqrt{x} \geq 0$, то $3^{\sqrt{x}} \geq 1$. Левая часть уравнения ограничена, так как

$-1 \leq \cos\left(22\pi - \frac{13x}{4}\right) \leq 1$. Поэтому уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos\left(22\pi - \frac{13x}{4}\right) = 1, \\ 3^{\sqrt{x}} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 22\pi = 1 \text{ (верно)}, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: 0.

8. Уравнения, содержащие логарифмические выражения

Пример 22. Решить уравнение $\log_2(\sin x) = \log_2(-\cos x)$.

Решение. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin x = -\cos x, \\ \sin x > 0. \end{cases}$

Из уравнения системы получаем $\operatorname{tg} x = -1, x = \frac{-\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Неравенству

$\sin x > 0$ удовлетворяют числа $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 23. Решить уравнение $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$.

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение. а) Из данного уравнения получаем:

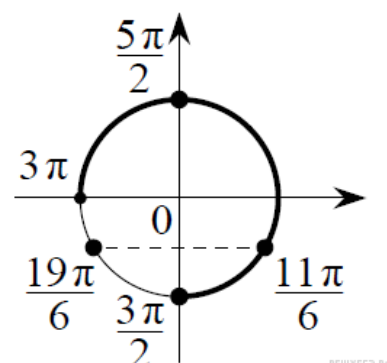
$$\cos x + \sin 2x + 8 = 8 \cos x + 2 \cos x \sin x = 0 \cos x (2 \sin x + 1) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда

$$x = \frac{-\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{или} \quad x = \frac{-5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём кор-

ни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$



Получим числа: $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{-5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}.$

9. Уравнения, содержащие модули

Пример 24. Решить уравнение $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2} \sin 2x$.

Решение. Имеем: $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2} \sin 2x \quad \begin{cases} (\cos x + \sin x)^2 = 2 \sin^2 2x, \\ \sin 2x \geq 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} 1 + \sin 2x = 2 \sin^2 2x, \\ \sin 2x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = \frac{-1}{2}, \\ \sin 2x \geq 0, \end{cases} \quad \sin 2x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 25. Решить уравнение $|\cos x| = \sqrt{3} \sin x$.

Решение. Из данного уравнения получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \cos x = \sqrt{3} \sin x, \\ \cos x = -\sqrt{3} \sin x, \\ \sin x \geq 0, \end{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin x \geq 0, \end{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ \sin x \geq 0, \end{cases}$$

Так как функции $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ имеют общий наименьший положительный период 2π , то выполнив отбор корней на тригонометрическом круге, получим

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ и } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textbf{Ответ: } \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 26. Решить уравнение $7|\cos x| - 4\cos x = 3|\sin x| + 2\sin x$.

Решение. Рассмотрим значения синуса и косинуса по четвертям координатной окружности.

Первая четверть: $3\cos x = 5\sin x \quad \operatorname{tg} x = \frac{3}{5} x = \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Вторая четверть: $-11\cos x = 5\sin x \operatorname{tg} x = \frac{-11}{5} x = \pi - \operatorname{arctg} \frac{11}{5} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}.$

Третья четверть: $-11\cos x = -\sin x \operatorname{tg} x = 11 x = \pi + \operatorname{arctg} 11 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$

Четвертая четверть: $3\cos x = -\sin x \operatorname{tg} x = -3 x = -\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

$$\textbf{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + 2\pi k, \pi - \operatorname{arctg} \frac{11}{5} + 2\pi l, \pi + \operatorname{arctg} 11 + 2\pi m, -\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n, k, l, m, n \in \mathbb{Z}.$$

10. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические

выражения

$$\arccos \frac{3x+4}{1-2x} = \pi x + 6\pi.$$

Пример 27. Решить уравнение

Решение. В соответствии с определением арккосинуса запишем ограничения, которым должна удовлетворять переменная x . Область допустимых значений

уравнения определяется условиями $-1 \leq \frac{3x+4}{1-2x} \leq 1$, а поскольку значения арккосинуса ограничены отрезком $[0; \pi]$, то для выполнения равенства необходимо выполнение условия $0 \leq \pi x + 6\pi \leq \pi$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{3x+4}{1-2x} \leq 1, \\ 0 \leq \pi x + 6\pi \leq \pi \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x+4}{1-2x} \geq -1, \\ \frac{3x+4}{1-2x} \leq 1, \\ 0 \leq x+6 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+5}{1-2x} \geq 0, \\ \frac{5x+3}{1-2x} \leq 0, \\ -6 \leq x \leq -5 \end{cases} \quad x = -5.$$

Подставляя полученное единственное значение $x = -5$ в исходное уравнение,

получим: $\arccos \frac{3(-5)+4}{1-2(-5)} = \pi(-5)+6\pi$, $\arccos \frac{-11}{11} = \pi$ или $\arccos(-1) = \pi$ (верно). Значит, данное уравнение имеет единственное решение $x = -5$.

Ответ: - 5.

Пример 28. Решить уравнение $\arccos(\sqrt{x^2-3}) = \arccos(x+3)$.

Решение. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-3=x+3, \\ -1 \leq x+3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6=0, \\ -4 \leq x \leq -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-2, \\ x=3, \end{cases} \\ -4 \leq x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Ответ: - 2.

Заключение

Умение, связанное с поиском решений, удовлетворяющих заданным значениям аргумента, является важным в решении многих прикладных задач. Необходимо специально формировать умение отбирать корни в процессе изучения всего тригонометрического материала. Не секрет, что в средней школе

на изучение темы «Решение тригонометрических уравнений» отводится незначительное количество часов. За это время невозможно рассмотреть, а тем более закрепить все методы решения тригонометрических уравнений, а также способы отбора корней. Времени хватает только для изучения самых основных из них. В то же время на ЕГЭ по математике из года в год встречаются тригонометрические уравнения, связанные с отбором корней. В этом плане учащиеся общеобразовательных школ оказываются в проигрыше. Данная работа может быть использована учащимися 10-11 классов при самостоятельной подготовке к ЕГЭ, а также учителями при составлении программ элективных курсов.

В процессе обучения решению задач, в которых требуется отобрать корни тригонометрического уравнения, с учениками следует обсудить разные способы выполнения этого действия, а также выяснить случаи, когда тот или иной способ может оказаться наиболее удобным или наоборот непригодным.

Список и источники литературы

1. Бардушкин В.В., Прокофьев А.А., Соколова Т.В., Фадеечева Т.П. «Тригонометрические уравнения. Отбор корней (По материалам вступительных экзаменов в МИЭТ)» – М.: «Математика» (Приложение к «1 сентября»), 2005, № 12, с.23-27.
2. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Математика ЕГЭ 2011. Типовые задания С1. Отбор корней в тригонометрических уравнениях.
<http://alexlarin.net/ege/2011/C12011.pdf>
3. ЕГЭ 2014. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семёнова, И.В. Ященко. – М.: «Экзамен», 2014.
4. www.alexlarin.net – сайт по оказанию информационной поддержки при подготовке к ЕГЭ, поступлении в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.
5. <http://reshuege.ru/> - образовательный портал для подготовки к экзаменам.

