

ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИКЕ

Гребенникова Елена Александровна,

Новосибирский государственный педагогический институт

E-mail: lena.grebennikova.71@mail.ru

Аннотация. Исследуется и доказывается возможность применения новых технологий в изучении математики. Приведены примеры использования специализированных математических пакетов.

Ключевые слова: информационные технологии, специализированные математические пакеты, пакет Wolfram Mathematica, функции, обучение.

Давно замечено, что из всех наук наиболее быстро развиваются точные. В настоящее время происходит интенсивная математизация знания, предполагающая, во-первых, обобщение уже достигнутого той или иной наукой и выделение нескольких ее основных утверждений (аксиом); во-вторых, закрепление принципов вывода, согласно которым утверждение данной науки логически вытекало из аксиом.

С другой стороны, растет множество специалистов-нематематиков, которым математика в настоящее время нужна в гораздо большем объеме, чем она излагалась в школе. Это – те специалисты, которые пытаются использовать математические методы в своих исследованиях [1]. Однако на практике очевидно либо наличие нечетких математических понятий, либо их отсутствие. Овладение же способом математического видения и описания объектов реального мира, на наш взгляд, должно стать обязательным атрибутом высококвалифицированного специалиста XXI века.

Математические формулы – лишь удобный язык для изложения идей и методов математики. Сами же эти идеи можно описать, используя привычные и наглядные образы из окружающей жизни. Математические понятия – понятия отвлеченные, абстрактные. Это лишь слепок с реального мира, его бледный силуэт. Выделяя абстрактные понятия в чистом виде, отсекая второстепенные детали, математик всегда обедняет жизнь.

Математическая мысль не исчерпывает всех проявлений человеческого разума. Однако еще Чарльз Дарвин утверждал, что у людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных.

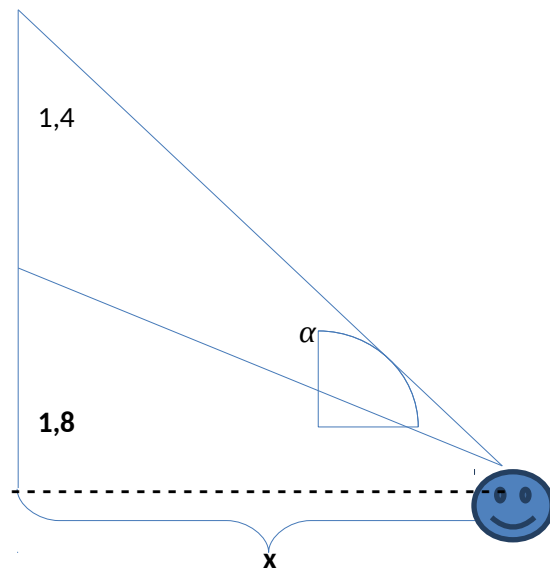
Одним из основных понятий математики является понятие функции. Покажем, как можно сформировать или уточнить это понятие (алгоритм приведен в [3]). Обратимся к задачам. Обсудим вопрос: нам необходимо повесить картину. Математическое обоснование следует сделать такое: в основу вывода положены две строгие математические зависимости. Первая устанавливает соответствие между следующими величинами: расстояние от нас до картины. Вторая связывает размеры картины и ее расположение на стене относительно пола. Такое соответствие принято называть в математике функцией одного аргумента.

Современная математика знает множество функций, и у каждой неповторимый облик, который можно представить сложением из набора характерных деталей, в которых проявляются

основные свойства функций. Функции – это математические портреты устойчивых закономерностей, познаваемых человеком.

Задача. На стене висит картина.

Высота картины 1,4м и располагается на 1,8м выше уровня глаз человека. На каком расстоянии от стены нужно встать, чтобы угол обзора был наибольшим?



Решение.

Составляем функцию $\alpha(x)$, где α – это угол обзора, а x – расстояние до стены.

$$\alpha = \arctan[3.2/x] - \arctan[1.8/x]$$

$$= -\arctan\left[\frac{1.8}{x}\right] + \arctan\left[\frac{3.2}{x}\right]$$

Находим производную функции $\alpha'(x)$.

$$D[\alpha, x]$$

$$\frac{1.8}{\left(1 + \frac{3.24}{x^2}\right)x^2} - \frac{3.2}{\left(1 + \frac{10.2400000000000002}{x^2}\right)x^2}$$

Производную приравняем к нулю.

$$\text{Solve}\left[\frac{1.8}{\left(1 + \frac{3.24}{x^2}\right)x^2} - \frac{3.2}{\left(1 + \frac{10.2400000000000002}{x^2}\right)x^2} = 0, x\right]$$

$$\{\{x \rightarrow -2.4000000000000004\}, \{x \rightarrow 2.4000000000000004\}\}$$

Найдем $\alpha(2.4)$. Найдем значение угла в радианах.

$$\alpha/. \{x \rightarrow 2.4\}$$

$$0.2837941092083279$$

Найдем значение угла в градусах.

$$\alpha_{gr} = * 180 / \pi$$

$$16.260204708311964$$

Найдем предел функции $\alpha(x)$ при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$.

$$\alpha_{01} = \text{Limit}[\alpha, x \rightarrow 0]$$

$$0.+0.i$$

$$\alpha_{02} = \text{Limit}[\alpha, x \rightarrow +\infty]$$

$$0.$$

Предел получился равным нулю.

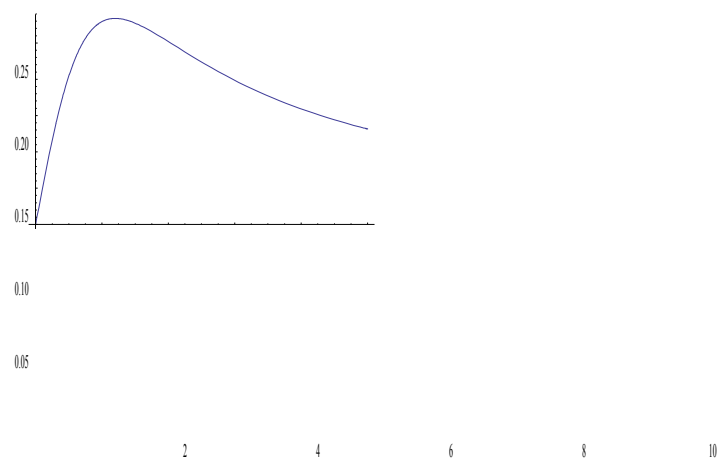
Находим максимальное значение среди стационарных точек.

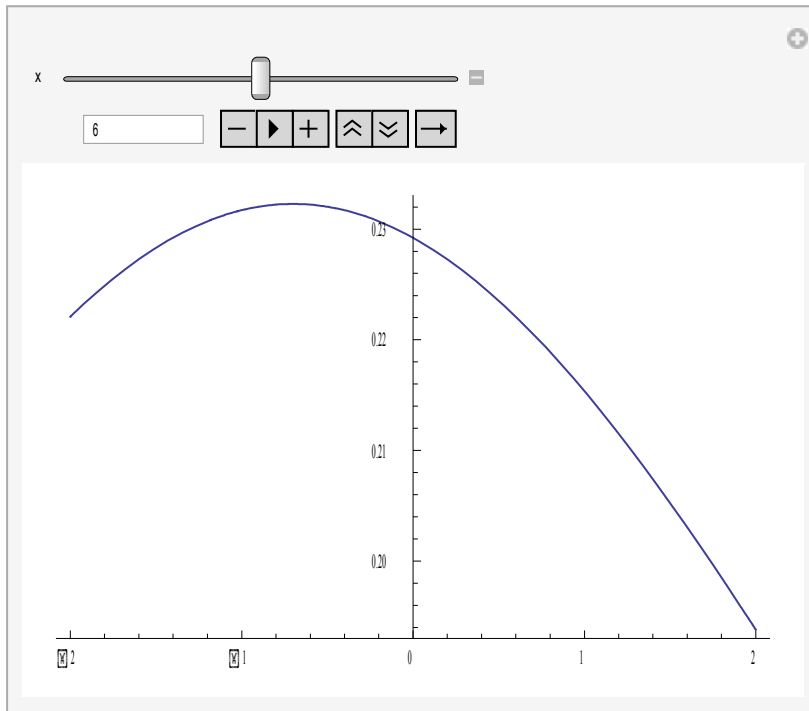
$$\text{Max}[0.2837941092083279, 0.+0.i, 0.]$$

$$0.2837941092083279$$

Строим график функции $\alpha(x)$.

$$\text{Plot}[\alpha, \{x, 0, 10\}]$$



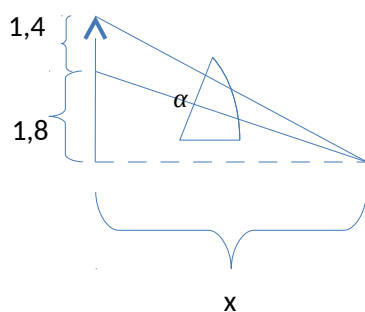


Изобразить графически приведенные зависимости средствами языков программирования высокого уровня (TBasic, TPascal и др.) без соответствующей подготовки практически невозможно. Приведенные трудности можно успешно преодолеть, если использовать возможности специальных математических пакетов. Таким пакетом может быть хорошо зарекомендовавший себя пакет Wolfram Mathematica.

Задача 1. На стене висит картина, высота картины равна 1,4 метра, и картина располагается на 1,8 м выше уровня глаз человека. На каком расстоянии от стены нужно встать, чтобы угол обзора был наибольшим.

Решение:

1. Составляем функцию $\alpha(x)$, где x – расстояние от месторасположения человека до стены.



$$\alpha = \arctan[3.2/x] - \arctan[1.8/x]$$

$$-\arctan\left[\frac{1.8}{x}\right] + \arctan\left[\frac{3.2}{x}\right]$$

2. Находим значение производной функции $\alpha(x)$

$$D[\alpha, x]$$

$$\frac{1.8}{\left(1 + \frac{3.24}{x^2}\right)x^2} - \frac{3.2}{\left(1 + \frac{10.240000000000002}{x^2}\right)x^2}$$

3. Решаем уравнение $\alpha'(x) = 0$

$$\text{Solve}\left[\frac{1.8}{\left(1 + \frac{3.24}{x^2}\right)x^2} - \frac{3.2}{\left(1 + \frac{10.240000000000002}{x^2}\right)x^2} = 0, x\right]$$

Получаем стационарные точки, по условию задачи удовлетворяет положительная точка

$$\{\{x \rightarrow -2.4000000000000004\}, \{x \rightarrow 2.4000000000000004\}\}$$

4. Определяем значение функции в полученной точке (значение вычисляется в радианах):

$$\alpha /. \{x \rightarrow 2.4\}$$

$$0.2837941092083279$$

5. Полученное значение переводим в градусы

$$\alpha_{gr} = \alpha * 180 / \pi$$

$$16.260204708311964$$

6. Вычисляем значение пределов на концах отрезка:

$$\alpha_{01} = \text{Limit}[\alpha, x \rightarrow 0]$$

$$0. + 0. i$$

$$\alpha_{02} = \text{Limit}[\alpha, x \rightarrow +\infty]$$

$$0.$$

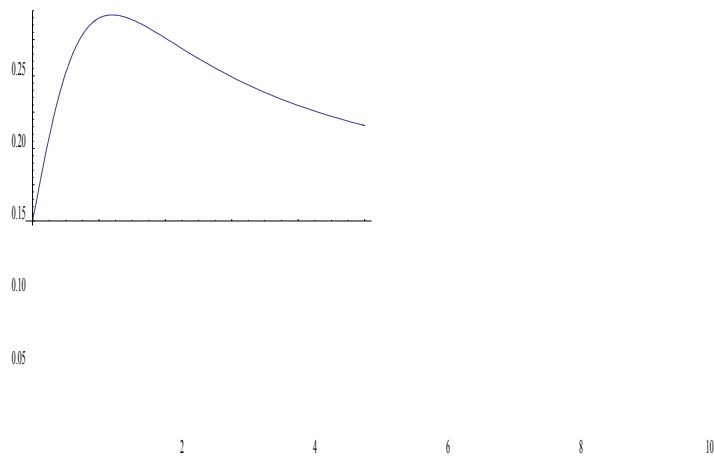
7. Вычисляем наибольшее значение между полученными результатами

$$\text{Max}[\alpha_{01}, \alpha_{02}, 0.2837941092083279]$$

$$0.2837941092083279$$

8. Изображаем полученный результат в виде графика на промежутке [0,10]

$$\text{Plot}[\alpha, \{x, 0, 10\}]$$



На графике видно, что наибольшее значение достигается именно в точке 2,4

Задача 2. На стене висит картина, высота картины равна 1,4 метра, человек располагается на расстоянии 5 метров. На каком расстоянии от уровня глаз необходимо повесить картину, чтобы угол обзора был наибольшим.

Решение:

1. Составляем функцию $\alpha(x)$, где x – расстояние от уровня глаз человека до картины.

$$\arctan\left[\frac{x}{5}\right] - \arctan\left[\frac{1}{5}(1.4 + x)\right]$$

$$\frac{1}{5(1+\frac{x^2}{25})} - \frac{1}{5(1+\frac{1}{25}(1.4+x)^2)}$$

$$\text{Solve}\left[\frac{1}{5(1+\frac{x^2}{25})} - \frac{1}{5(1+\frac{1}{25}(1.4+x)^2)} = 0, x\right]$$

$$\{x \rightarrow -0.7\}$$

Задача: При каком значении h , x угол обзора будет наибольшим

1. Составляем функцию $\alpha(x)$, где h – расстояние от уровня глаз человека до картины, x – расстояние от человека до стены.

$$-\arctan\left[\frac{h}{x}\right] + \arctan\left[\frac{1.4+h}{x}\right]$$

2. Находим значение частных производных функции $\alpha(x, h)$

$$\frac{h}{(1+\frac{h^2}{x^2})x^2} - \frac{1.4+h}{(1+\frac{(1.4+h)^2}{x^2})x^2}$$

$$\frac{-1}{(1+\frac{h^2}{x^2})x} + \frac{1}{(1+\frac{(1.4+h)^2}{x^2})x}$$

3. Решаем систему уравнений, приравняв частные производные к нулю:

$$\text{Solve}\left[\frac{h}{\left(1+\frac{h^2}{x^2}\right)x^2}-\frac{1.4+h}{\left(1+\frac{(1.4+h)^2}{x^2}\right)x^2}=0\wedge-\frac{1}{\left(1+\frac{h^2}{x^2}\right)x}+\frac{1}{\left(1+\frac{(1.4+h)^2}{x^2}\right)x}=0,\{x,h\}\right]$$

Система решения не имеет

{}

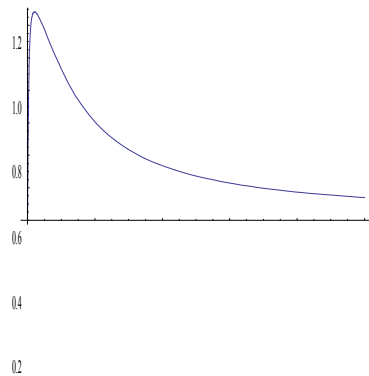
4. Находим наибольшее значение на концах промежутка:

$$\text{Maximize}[\alpha,\{x,h\}]$$

$$\{3.141592653545292,\{x\rightarrow 6.567189403293105\times 10^{-12},h\rightarrow -1.2323528328454256\}\}$$

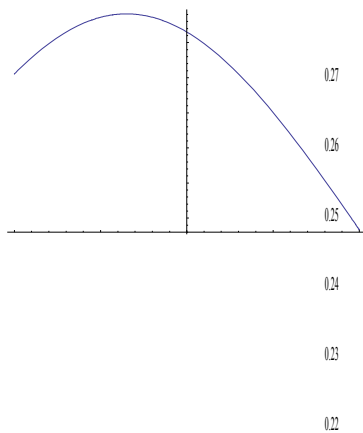
5. Изображаем графически:

6. $\text{Manipulate}[\text{Plot}[-\arctan[\frac{h}{x}]+\arctan[\frac{1.4+h}{x}],\{x,1.\times 10^{-10},10\}],\{h,-2,2\}]$

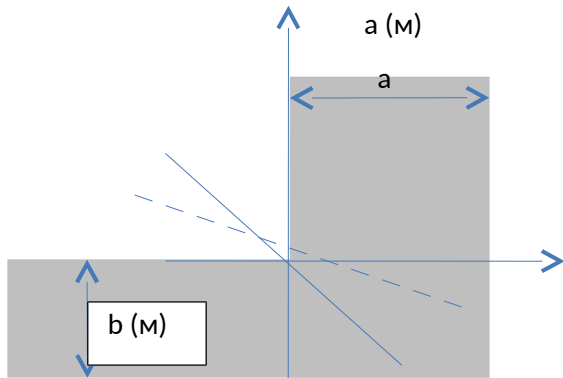


- 7.

$$\text{Manipulate}[\text{Plot}[-\arctan[\frac{h}{x}]+\arctan[\frac{1.4+h}{x}],\{h,-2,2\}],\{x,5,7\}]$$



Задача 2: Коридоры поворачиваются под прямым углом, до поворота ширина b м, ширина после поворота a м. Какова максимальная длина трубы, которую можно горизонтально пронести через коридор?



Решение:

- 1) Рассматриваем пучок прямых $y=k*x$. Определяем координаты точек А и В, при котором длина отрезка АВ, получающегося при пересечении длины с коридором, будет минимальной. Задаем функцию F_k :

$$f_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)^2 + (k*a + b)^2$$

В программе получаем:

$$\left(a + \frac{b}{k}\right)^2 + (b + ak)^2$$

2. Находим производную полученной функции:

$$f_{kpr} = D[f_k, k]$$

В программе получаем:

$$\frac{-2b\left(a + \frac{b}{k}\right)}{k^2} + 2a(b + ak)$$

3. Решаем уравнение, приравняв производную к нулю $Solve[f_{kpr} = 0, k]$

Программой получили точки, одну положительную, три отрицательных). Будем рассматривать положительную точку.

$$\left\{ \left\{ k \rightarrow \frac{b^{1/3}}{a^{1/3}} \right\}, \left\{ k \rightarrow -\frac{(-1)^{1/3} b^{1/3}}{a^{1/3}} \right\}, \left\{ k \rightarrow \frac{(-1)^{2/3} b^{1/3}}{a^{1/3}} \right\}, \left\{ k \rightarrow -\frac{b}{a} \right\} \right\}$$

4. Определяем значение функции F_k в полученной точке (k):

$$f_k /. \left\{ k \rightarrow \frac{b^{1/3}}{a^{1/3}} \right\}$$

Программой получаем результат:

$$\left(a + a^{1/3} b^{2/3}\right)^2 + \left(a^{2/3} b^{1/3} + b\right)^2$$

5. Вычисляем значение пределов на концах, при условии $a=3(\text{м})$, $b=4(\text{м})$

$$a=3$$

$$b=4$$

Получим значение в конкретных точках: $f_{kab} = (a + a^{1/3} b^{2/3})^2 + (a^{2/3} b^{1/3} + b)^2$

Программа выдаст результат: $(3 + 26^{1/3})^2 + (4 + 6^{2/3})^2$

5° Попробуем упростить полученное выражение:

$$25 + 186^{1/3} + 126^{2/3}$$

Если хотим в десятичных дробях получить ответ, тогда:

$$N[]$$

Программа выдаст результат: 97.33129765771403

6. Вычисляем значение пределов: (при $k \rightarrow 0$)

$$\text{Limit}[fk, k \rightarrow 0]$$

Программа выдает: ∞

Вычисляем значение пределов: (при $k \rightarrow \infty$)

$$\text{Limit}[fk, k \rightarrow \infty]$$

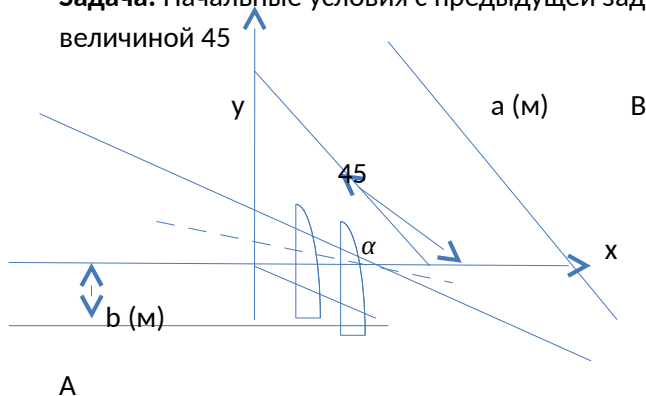
Программа выдает: ∞

Минимальное значение получаем в экстремальной точке (97.33129765771403)

7. Находим длину, вычисляя корень квадратный $L = \sqrt{[97.33129765771403]}$

Программа выдает: 9.86566255543509

Задача: Начальные условия с предыдущей задачи, но угол перегиба коридоров происходит под величиной 45



A

Решение:

$$l_1 + l_2 = a / (\sqrt{2} \sin \alpha) + a / \sin(45 - \alpha)$$

Для начальных условий возьмем $a=2$

1. Введем функцию, зависящую от α : $f\alpha = a / (\sqrt{2} \sin \alpha) + a / \sin [Pi/4 - \alpha]$

Программа выдаст результат:

$$2 \text{Csc}[\frac{\pi}{4} - \alpha] + \sqrt{2} \text{Csc}[\alpha]$$

2. Найдем производную функции: $F\alpha_{pr} = D[f\alpha, \alpha]$

Программа выдаст результат: $2 \cot\left[\frac{\pi}{4} - \alpha\right] \operatorname{Csc}\left[\frac{\pi}{4} - \alpha\right] - \sqrt{2} \cot[\alpha] \operatorname{Csc}[\alpha]$

3. Приравниваем производную к нулю, вводя ограничения на α , $\alpha \geq 0.01$, $\alpha \leq \pi/4 - 0.01$

$\text{Solve}\left[\left\{f_{\alpha} = 0, \alpha \geq 0.01, \alpha \leq \pi/4 - 0.01\right\}, \alpha\right]$

После выполнения программа выдаст результат: $\{\{\alpha \rightarrow 0.359722342893082\}\}$

4. Находим значение функции в полученной точке

$f_{\alpha} /. \{\alpha \rightarrow 0.359722342893082\}$

Программа выдаст результат:

8.860849283970886

Получаем, что при $a=2$, максимальная длина пронесенного предмета составляет $\approx 8,86(\text{м})$

литературу.

1. Жмурова И. Ю., Генералова А. А. Оптимизационные задачи в школьном курсе математики // Молодой ученый. — 2016. — №14. — С. 537-539.
<https://moluch.ru/archive/118/32649/>

Может быть полезна при подготовке вашей первой статьи. Обосновывается, почему полезно в школе рассматривать оптимизационные задачи.

2. Прикладные задачи на экстремумы, Куликова
О.А. <http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2011/10/19/prikladnye-zadachi-na-ekstremumy>

Здесь и о простых алгебраических задачах, и о геометрических

С уважением,
Татьяна Семенко