

*Коломина А.А.*

*студент*

*2 курс, факультет «Промышленное и гражданское строительство»*

*Государственный технический университет*

*Академия строительства и архитектуры*

*Россия, г. Самара*

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ РФ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

В данной работе рассматривается численный метод оценки параметров нелинейной математической модели, описывающей изменения численности населения Российской Федерации, вида  $\hat{y}(t) = a_0 \exp(\alpha t) \cos(\omega t + \psi_0) + a_1$ , с учетом данных наблюдений за период с 1984 по 2017 год, представленных на сайте «Население земли» <http://www.countrysimeters.info/ru/world>. Из-за нелинейного характера модели относительно её параметров  $\alpha$ ,  $\omega$  и  $a_1$  применение известных методов нелинейной регрессии не позволяет эффективно решить задачу среднеквадратичного оценивания на основе результатов наблюдений.

Предлагается новый численный метод, в основе которого лежит система разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений, коэффициенты которых известным образом связаны с параметрами математической модели изменения численности населения РФ:

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_4 + \varepsilon_0, \\ y_1 = \lambda_5 + \varepsilon_1, \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 y_{k-2} + \lambda_3 + \eta_k, \\ \eta_k = -\lambda_2 \varepsilon_{k-2} - \lambda_1 \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k, \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots, N-1. \quad (1)$$

где  $\lambda_1 = 2\exp(\alpha\tau)\cos\omega\tau$ ,  $\lambda_2 = -\exp(2\alpha\tau)$ ,  $\lambda_3 = a_1(1 - \lambda_1 - \lambda_2)$ ,  $\lambda_4 = a_0\cos\psi_0 + a_1$ ,  $\lambda_5 = a_0\exp(\alpha\tau)\cos(\omega t + \psi_0) + a_1$ . Такой подход позволяет свести задачу среднеквадратичного оценивания к решению линейной системы нормальных уравнений вида  $(F^T \Omega_\lambda^{-1} F)^{-1} \hat{\lambda} = F^T \Omega_\lambda^{-1} y$ , где матрицы  $\Omega_\lambda = P_\lambda P_\lambda^T$  и  $P_\lambda$  формируются с учетом разностного уравнения, описывающего эквивалентное случайное возмущение в системе уравнений (1). Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения описывается формулой  $\hat{\lambda}^{(i)} = (F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i-1)}}^{-1} F)^{-1} F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i-1)}}^{-1} y$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Начальное приближение вектора оценок коэффициентов разностного уравнения может быть найдено по формуле:  $\lambda^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T y$ .

Проведенные расчеты позволили уже на третьей итерации получить следующие оценки коэффициентов:  $\hat{\lambda}_1 = 1,891$ ,  $\hat{\lambda}_2 = -0,932$ ,  $\hat{\lambda}_3 = 5,997$ ,  $\hat{\lambda}_4 = 141,12$  и  $\hat{\lambda}_5 = 142,13$ . С учетом известных соотношений между коэффициентами разностных уравнений (1) и параметрами нелинейной математической модели были вычислены оценки последних:  $\hat{\alpha} = -0,0359$ ,  $\hat{\omega} = 0,204$ ,  $\hat{a}_1 = 145,02$ ,  $a_0 = 5,664$  и  $\psi_0 = -2,33$ . При этом математическая модель изменения численности населения РФ может быть описана уравнением вида

$$\hat{y}(t) = 5,664 \exp[-0,036(t-1984)] \cos[0,204(t-1984) - 2,33] + 145,02 \quad (2).$$

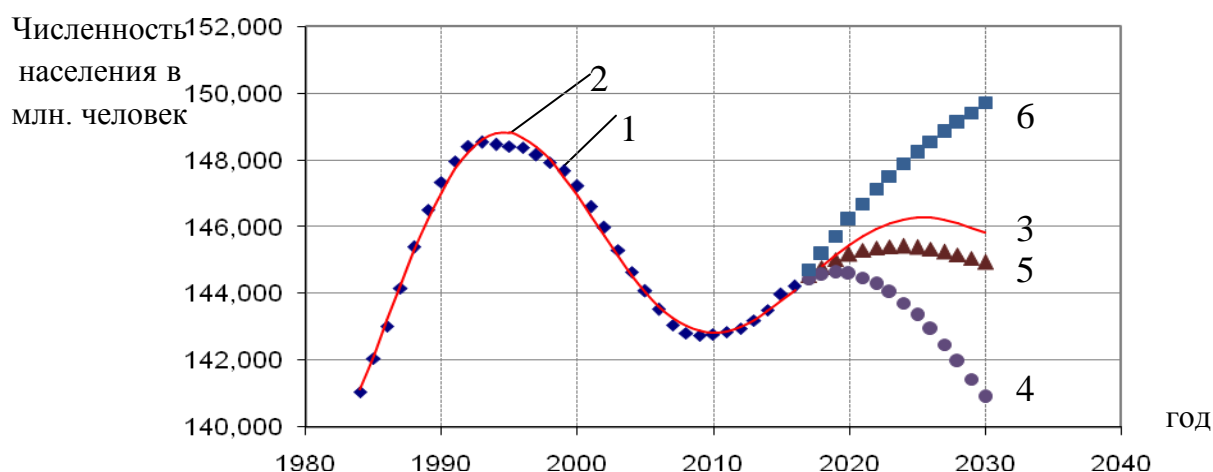


Рис. Численности населения РФ за период с 1984 по 2016 год (точки 1) график изменения численности, построенный по математической модели (кривая 2) и сравнение результатов расчета с различными вариантами

На рисунке представлены графики соответствующих вариантов прогноза: кривая 3 — вариант прогноза, сделанного на основе построенной математической модели; кривые 4, 5 и 6 — низкий, средний и высокий варианты прогнозов, приведенных на сайте «Федеральная служба государственной статистики». Очевидно, что прогноз численности населения РФ, сделанный по математической модели (2), не расходится с прогнозом, представленным на сайте «Федеральная служба государственной статистики», что подтверждает высокую адекватность построенной модели.

#### Использованные источники:

1. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. — 2-ое изд. — Л.: Физматгиз, 1962. — 352 с.

2. Население Земли [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.countrymeters.info/ru/world/>

3. О странах и городах, статистике населения и пр. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.statdata.ru/russia>

4. Демографический прогноз до 2030 г. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://www.gks.ru>