

Муниципальное казенное общеобразовательное учреждение
гимназия города Слободского Кировской области

Геодезические линии

исследовательская работа

Автор: Исупова Мария Сергеевна,
ученица 6 класса МКОУ гимназии
г. Слободского Кировской области

Руководитель:
Рычкова Ольга Валерьевна,
учитель математики МКОУ гимназии
г. Слободского Кировской области

2021

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Понятие кратчайшего расстояния (геодезической линии).....	4
Глава 2. Исследование кратчайших расстояний на разных поверхностях.....	4
2.1. Исследование кратчайших расстояний на многогранной поверхности.....	4
2.2. Нахождение кратчайших расстояний на поверхностях цилиндра и конуса.....	5
2.3. Кратчайшее расстояние на поверхности сферы.....	5
2.4. Траектория полета самолетов.....	5
2.5. Диагностика учеников по определению кратчайшей траектории полета самолета по карте и глобусу.....	6
Заключение.....	6
Список использованных источников.....	7
Приложения:	
Приложение 1 Сравнение траекторий полета самолета по карте	
Приложение 2 Биографическая справка	
Приложение 3 Исследование кратчайших расстояний на многогранной поверхности	
Приложение 4 Нахождение кратчайших расстояний на поверхностях цилиндра и конуса	
Приложение 5 Эксперимент получения плоской развертки сферы	
Приложение 6 Сравнение траекторий полета самолета по глобусу	
Приложение 7 Траектория полета самолета из Калининграда во Владивосток, нарисованная сервисом Яндекс. Карты	
Приложение 8 Результаты диагностики учеников	
Приложение 9 Изображение кратчайших (геодезических) линий на поверхностях	

Введение.

Люблю решать задачи по математике не только из учебника, но и из других источников. В одном из математических сборников встретилась реальная ситуация - задача, которая вызвала особый интерес: *«Из Аишабада в Сан – Франциско отправляется самолет. Стюардесса объявляет: «Наш самолет летит по кратчайшему пути». Среди пассажиров был известный полярный путешественник Морозов – Стужин. Услышав её слова, он попросил разбудить его, когда самолет будет над Северным Ледовитым океаном. Все кругом засмеялись: Аишабад, Сан – Франциско и вдруг – Ледовитый океан! А как вы считаете, шутил полярник или говорил серьёзно?»* [2].

Найдя на географической карте эти два города и соединив их прямой линией, можно увидеть, что полученный отрезок вовсе не проходит через Северный Ледовитый океан (Приложение 1). Но с другой стороны, Николай Васильевич Морозов – известный русский исследователь северных морей и территорий (Приложение 2), вряд ли мог ошибаться. Передо мной оказалась противоречивая информация (**проблема**): кратчайшее расстояние между двумя городами (точками) на карте не совпадает с линией кратчайшего пути на реальной земной поверхности.

Мы решили выяснить, какие линии изображают кратчайшие расстояния на плоскости и на поверхностях объемных тел.

Объект исследования: поверхности объемных тел (цилиндра, конуса, сферы).

Предмет исследования: кратчайшее расстояние между двумя точками на разных поверхностях.

Цель: выяснить, какие линии на разных поверхностях являются кратчайшими расстояниями между двумя точками.

Задачи:

1. Используя литературу, определить понятие кратчайшей линии.
2. Провести диагностику учеников по определению кратчайшей траектории полета самолета по карте и глобусу.
3. Исследовать кратчайшие расстояния на разных поверхностях.
4. Научиться изображать кратчайшие линии на разных поверхностях.

Гипотеза: кратчайшим расстоянием между двумя точками на всех поверхностях является прямая линия, соединяющая эти точки.

Оборудование: модели тел, географическая карта, глобус, сантиметровая лента.

Методы исследования:

анализ литературы,
моделирование,
синтез,
сравнение.

Глава 1. Понятие кратчайшего расстояния (геодезической линии).

Понятие кратчайшего расстояния неразрывно связано с той поверхностью, по которой оно измеряется. Изучая литературу, в математической энциклопедии [3] я прочитала, что кратчайшая – это линия в пространстве, соединяющая две его точки и не превосходящая по длине любую другую линию с теми же концами. Также я узнала, что линии, вдоль которых проходят кратчайшие расстояния на разных поверхностях, называются геодезическими.

Геодезическая линия - это одно из основных понятий науки геодезии. Из интернет-источников [8] узнала, что геодезия - наука о производстве измерений на местности, определении фигуры и размеров Земли и изображении земной поверхности в виде планов и карт. Геодезия развивается в тесной связи с другими науками. Огромное влияние на развитие геодезии оказывают математика, физика, астрономия. Математика вооружает геодезию средствами анализа и методами обработки результатов измерений. На основе физики рассчитывают оптические приборы и инструменты для геодезических измерений. Тесную связь геодезия имеет также с географией и геологией.

Глава 2. Исследование кратчайших расстояний на разных поверхностях.

2.1. Исследование кратчайших расстояний на многогранной поверхности.

Хорошо известно, что кратчайшее расстояние между двумя точками на плоскости изображает отрезок, соединяющий эти точки. Провела со своими одноклассниками игру с листом бумаги по определению кратчайших расстояний между точками, когда плоский лист «превращается» в неплоскую поверхность. Игра – исследование состоит из трех заданий.

Задание 1. Нарисовать на листе бумаги две точки и найти кратчайший путь между ними. Эта задача легко решена всеми учениками. Понятно, что достаточно одной линейки, чтобы соединить обе точки прямой линией. Это расстояние и будет наименьшим. Вывод: отрезок прямой — кратчайшая из линий, соединяющих две точки на плоскости (*Приложение 3 рис. 1*).

Задание 2. Сейчас предлагаю участникам эксперимента отметить на листе бумаги две точки, согнуть лист и на согнутом листе провести самый короткий путь между точками. Теперь этот вопрос уже не так прост, как в случае, когда лист лежит на столе.

Если мы согнем лист пополам и поставим его на стол как открытую книгу, то увидим, что прямая превратилась в ломаную.

Если на листе не нарисована эта линия, как нам узнать, каково кратчайшее расстояние между двумя точками? Поэтому проведенные ребятами линии отличаются от правильной (*Приложение 3 рис. 2*).

А если на листе не один, а несколько сгибов? Задача станет еще более сложной.

Задание 3. Согните лист в нескольких местах, отметьте на нем две точки, после чего попросите «соседа» по парте провести кратчайшую линию между точками, не разгибая лист. После того, как линия нарисована, лист разворачивается. Теперь можно легко проверить, насколько велика допущенная ошибка — ведь решением всегда будет прямая линия, соединяющая обе точки (*Приложение 3 рис. 3*).

Вывод: кратчайшей линией на согнутом листе является ломаная.

Но все это не просто игра. Это задача, которая веками приковывала внимание математиков: как определить геодезическую линию для любой поверхности.

Результат опытов с листом бумаги можно обобщить для многогранных поверхностей, образующихся путем многократного сгибания листа. На каждом из сгибов, то есть на каждой грани, отрезки ломаной линии образуют равные углы. Таким способом можно построить геодезические линии на поверхности призмы (*Приложение 3 рис. 4*).

2.2. Нахождение кратчайших расстояний на поверхностях цилиндра и конуса.

Боковую поверхность цилиндра можно разложить в форме прямоугольника на поверхности стола. Допустим, мы хотим провести кратчайшую линию между двумя точками на поверхности цилиндра. Разложим цилиндр по поверхности стола и соединим точки отрезком с помощью линейки. Если свернуть лист бумаги, снова получится цилиндрическая поверхность. Начертив много разных отрезков на развертке цилиндра и свернув прямоугольник обратно в цилиндр, я могу сделать вывод. Прямые линии, показывающие кратчайшее расстояние между двумя точками на цилиндрической поверхности, представляют образующую цилиндра (или ее часть), либо дугу окружности, либо винтовую линию на поверхности цилиндра (*Приложение 4 рис. 1-5*).

Аналогично можно разложить на плоскости коническую поверхность, соединить две точки отрезком и вернуть лист в форму конуса. Кратчайшей линией также будет образующая конуса (или ее часть), либо дуга окружности, либо винтовая линия (*Приложение 4 рис. 6-7*).

2.3. Кратчайшее расстояние на поверхности сферы.

Подобный способ рассуждений (метод развертывания) не помог для определения кратчайшего расстояния на сфере. Надувая воздушный шарик, затем разрезая его, я не смогла разложить сферическую поверхность на плоскости без искажений (*Приложение 5*). Значит, и плоская карта изображает земную поверхность с искажениями. Из литературы узнала, что карты, как модели Земли, изображают ее поверхность в разных проекциях. На картах встречается четыре вида искажений – длины, площади, углов и форм [1].

Вернемся к задаче про самолет, летящий из Ашхабада в Сан-Франциско, и рассмотрим соответствующие траектории на глобусе. С помощью сантиметровой ленты на глобусе выполняем несколько измерений: измеряем расстояние между этими городами «по прямой», изображенной на карте, и длину траектории, проходящей через Северный Ледовитый океан. После этого сравниваем результаты измерений на глобусе с аналогичными измерениями на карте. Путь, который на карте короче, оказался на глобусе более длинным и наоборот (*Приложение 6*). Если точки А и В лежат на одном меридиане, то кратчайший путь от А к В идет по меридиану. У Ашхабада географическая координата по широте составляет примерно 38° с. ш., у Сан-Франциско – примерно 38° с. ш. Так как меридианы Ашхабада и Сан-Франциско почти совпадают, то кратчайший путь из Ашхабада в Сан-Франциско проходит вблизи от северного полюса. То есть Н. В. Морозов был абсолютно прав, когда говорил, что самолёт пролетит над Северным Ледовитым океаном. Все остальные маршруты, соединяющие Ашхабад и Сан-Франциско, в том числе тот, который казался прямым на карте, на глобусе, а, значит, и в реальности будут длиннее этой дуги.

Вывод: кратчайший путь, соединяющий любые две точки А и В на сфере, – это дуга окружности, проходящей через точки А и В, центр которой совпадает с центром сферы. Такую окружность называют *большой*.

2.4. Траектория полета самолетов.

Тысячи людей ежедневно летают на самолетах. Все понимают, что для экономии времени, безопасности и снижения стоимости перелета, самолет должен выбирать самый короткий путь. Попробуем «перелететь» с запада на восток нашей страны, например, из Калининграда во Владивосток, с помощью сервиса *Яндекс. Карты*.

Сейчас меня не удивляет, почему сервис рисует не прямую линию между городами, а выпуклую вверх кривую (*Приложение 7*). Стало понятно, что пролетая вдоль дуги большой окружности, самолеты выбирают «правильную» траекторию, то есть самый короткий путь.

Итак, кратчайшая траектория полёта самолёта определяется дугой большой окружности.

2.5. Диагностика учеников по определению кратчайшей траектории полета самолета по карте и глобусу.

Мы провели диагностику с моими одноклассниками. Диагностика включает два этапа:

- 1) После прочтения задачи про полет самолета участникам диагностики было предложено на карте провести самую короткую линию между городами, вдоль которой должен лететь самолет. Все ученики провели прямую линию, считая этот путь короче, чем через Северный Ледовитый океан (*Приложение 8 рис. 1*).
- 2) Каждому участнику выдана цветная лента, с помощью которой нужно было «проложить» на глобусе самую короткую траекторию полета из Ашхабада до Сан-Франциско. После выбора пути кусок ленты нужной длины отрезался.

Итоги этой диагностики продемонстрированы сразу: все ленты участников оказались длиннее ленты, показывающей путь по дуге большой окружности, так как все пытались показать путь, как на карте (*Приложение 8 рис. 2*).

Такой результат удивил и вызвал интерес у ребят. Все пожелали узнать о проведенном исследовании. Работа оказалась значимой для моих одноклассников и получила одобрительные отзывы.

Заключение.

В результате работы я узнала, как выглядят кратчайшие линии на разных поверхностях, и научилась их изображать (*Приложение 9*). Поставленные задачи выполнены. Моя гипотеза о том, что кратчайшим расстоянием между двумя точками на всех поверхностях является прямая линия, соединяющая эти точки, **не подтвердилась**. Кратчайшие линии на разных поверхностях различаются.

Для меня и моих одноклассников стала интересным открытием траектория полета самолетов.

Кроме этих результатов убедилась на примере нашего ученого, Н. В. Морозова, что, используя свои знания, можно ориентироваться в различных обстоятельствах, в окружающей жизни.

В перспективе хотела бы использовать полученные знания для решения задач на определение кратчайших расстояний.

Список использованных источников:

1. Большая серия знаний. Планета Земля/Сост. А. М. Берлянт.-М.: ООО «ТД «Издательство Мир книги», 2006.-128 с.: ил.
2. Гусев В. А. и др. Внеклассная работа по математике в 6 -8 классах. Под ред. С. И. Шварцбурда. М., «Просвещение», 1977.
3. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И. М. Виноградов, т. 3 Коо-Од-М.: «Советская энциклопедия», 1982.-118 4стб., ил.
4. Сервис Яндекс. Карты
5. <https://matemonline.com/2013/06/geodesic-lines/>
6. <http://images.yandex.ru>
7. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%BE%D0%B2,%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0%D0%B9_%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87
8. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%B7%D0%B8%D1%8F#%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8B_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%B7%D0%B8%D0%B8

Сравнение траекторий полета самолета по карте.



Красная линия – траектория полета по прямой.

Желтая линия – возможная траектория полета через Северный Ледовитый океан.

Вывод: сравнивая линии, хорошо видно, что красная линия короче желтой.

Биографическая справка.



Николай Васильевич Морозов (1862- 1925) - исследователь залива Петра Великого и морей Северного Ледовитого океана, генерал-майор корпуса флотских штурманов. Родился в Курской губернии, в купеческой семье. Окончил штурманское отделение Технического училища Морского ведомства, служил на Балтике. В 1888-1891 гг. в составе Отдельной съемки Восточного океана выполнял гидрографические работы в заливе Петра Великого. С 1891 г. штурманским офицером фрегата "Владимир Мономах" в составе Тихоокеанской эскадры плавал в Тихом океане, в 1892 г. перешел в Кронштадт. Большая часть биографии Н.В. Морозова связана с изучением морей Северного Ледовитого океана: гидрографические работы, охрана рыбных и зверобойных промыслов, выявление характеристики рельефа дна от Варангер - фьорда до Обской губы, лоцмейстерство Карского моря. Н.В. Морозов опубликовал работы: "Лоция Самоедского берега", "Поморский словарь", "Лоция Мурманского берега", "Лоция Белого моря". Именем Морозова названы два мыса в Баренцевом море, мысы в Японском, Карском морях и море Лаптевых, а также остров и пролив в Карском море.

Исследование кратчайших расстояний на многогранной поверхности.

Правильная линия	Работы одноклассников
	
Рис. 1. Определение кратчайшего расстояния между двумя точками на плоском листе бумаги	
	
Рис. 2. Определение кратчайшего расстояния между двумя точками на листе бумаги с одним сгибом	
	
Рис. 3. Определение кратчайшего расстояния между двумя точками на листе бумаги с несколькими сгибами.	

Вывод: кратчайшая линия на согнутом листе – это ломаная, звенья которой образуют равные углы с линиями сгибов.



Рис. 4. Кратчайшая линия на боковой поверхности призмы.

**Нахождение кратчайших расстояний на поверхностях
цилиндра и конуса.**

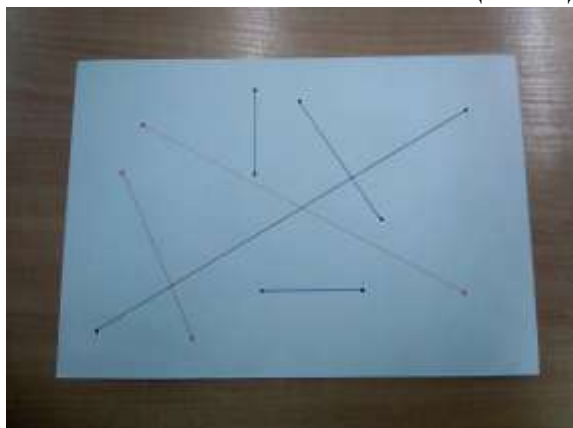


Рис. 1. Кратчайшие линии на развертке боковой поверхности цилиндра



Рис. 2. Кратчайшие линии на боковой поверхности цилиндра



Рис.3. Дуга окружности



Рис. 4. Часть образующей



Рис. 5. Винтовая линия

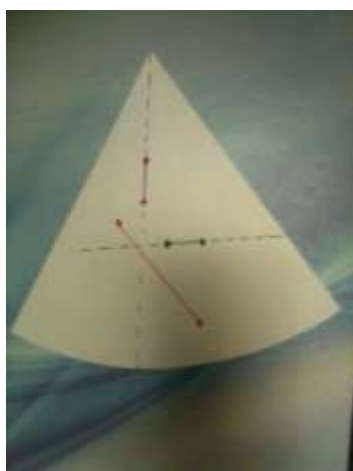


Рис. 6. Кратчайшие линии на развертке боковой поверхности конуса



Рис. 7. Кратчайшие линии на боковой поверхности конуса

Эксперимент получения плоской развертки сферы



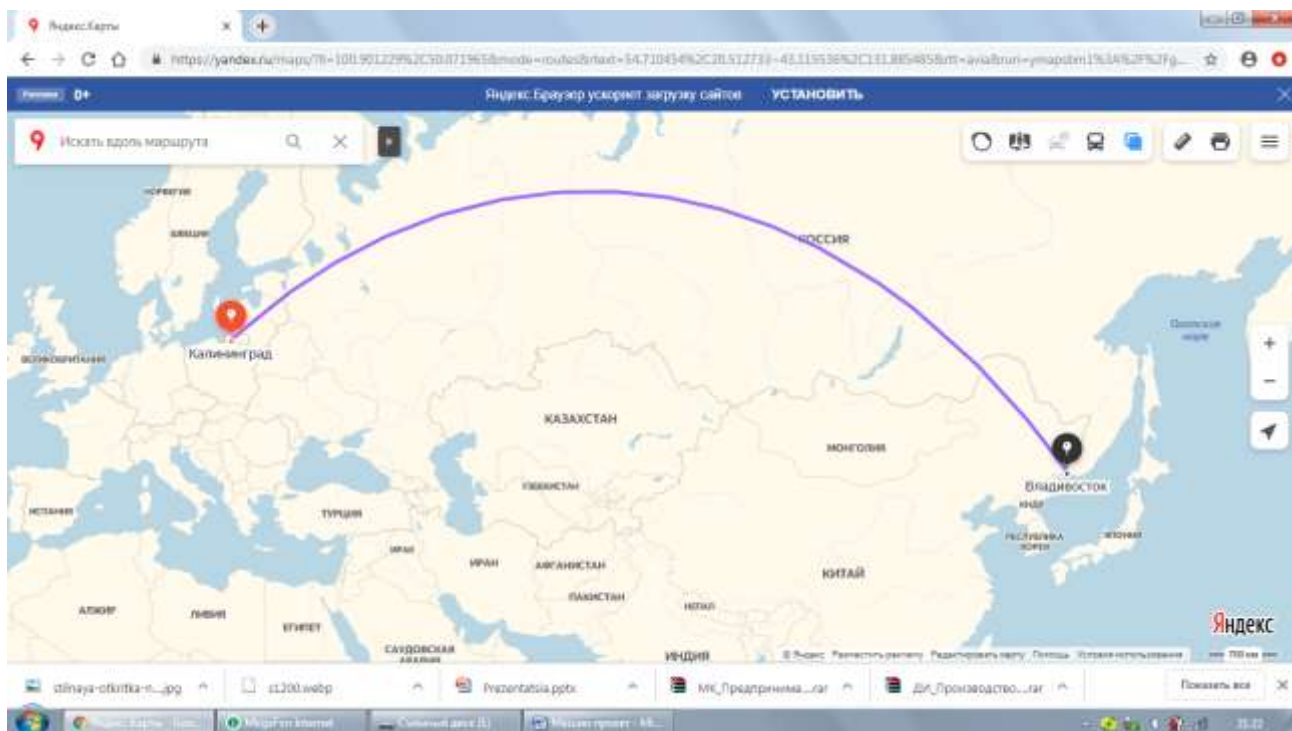
Вывод: нельзя разложить сферическую поверхность на плоскости без искажений.

Сравнение траекторий полета самолета по глобусу.



Вывод: путь, который на карте короче, оказался на глобусе более длинным и наоборот.

Траектория полета самолета из Калининграда во Владивосток, нарисованная сервисом Яндекс. Карты.



Вывод: кратчайшая траектория полёта самолёта определяется дугой большой окружности.

Результаты диагностики учеников.

Все ученики провели на карте прямую линию между городами, считая этот путь короче, чем через Северный Ледовитый океан.



Рис. 1

Все ленты участников (красного цвета) оказались длиннее ленты (желтого цвета), показывающей путь по дуге большой окружности, так как все пытались показать путь, как на карте.

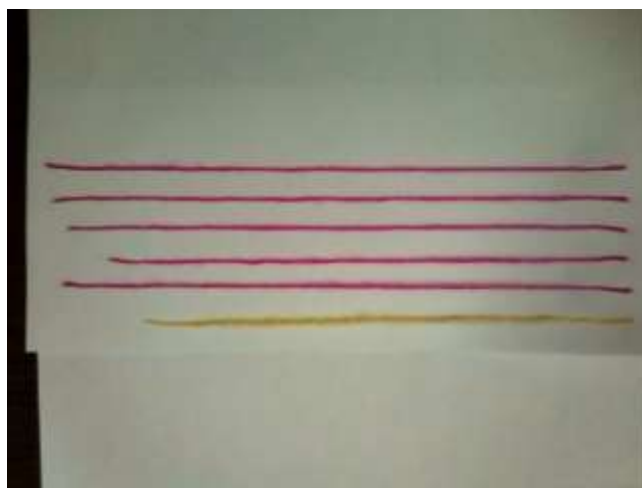






Рис. 2

Изображение кратчайших (геодезических) линий на поверхностях.

Поверхность	Описание линии, изображающей кратчайшее расстояние между точками	Изображение кратчайшей линии	
плоскость	отрезок		
многогранник (на примере призмы)	ломаная линия, образующая равные углы с ребрами		
цилиндр	образующая (или часть) дуга окружности винтовая линия		
конус			
сфера	дуга большой окружности		