

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ТЕРРИТОРИИ

Власова Олеся Николаевна

студентка, Оренбургского государственного педагогического
университета, г. Оренбург

Аннотация

В статье рассматривается нахождение оптимального размещения средств визуального контроля территорий, представляемых в виде плоских и трехмерных моделей, с использованием алгоритмов теории графов. Изучены понятия доминирующих и независимых множеств вершин в графах. Изучены алгоритмы нахождения доминирующих и независимых множеств вершин в графах и решения задачи о покрытии. Изучено понятие планарности графа. Разработан алгоритм для ее решения с использованием независимых и доминирующих множеств.

Ключевые слова: граф, множества, ребро, вершина, плоскость, алгоритм.

1. Основные понятия теории графов

Граф – абстрактная математическая модель, состоящая из множества вершин V , соединённых множеством рёбер E .

Пусть задан граф $G = (V, E)$.

Если вершина V является концом ребра E , то говорят, что они инцидентны.

Если вершина v и ребро e инцидентны, то будем говорить, что вершина v *покрывает* ребро e , а ребро e покрывает вершину v .

Множество вершин, покрывающих все ребра графа, называется вершинным покрытием.

Независимое множество вершин – множество вершин графа, в котором никакие две вершины несмежны.

Доминирующее множество вершин V' – множество вершин графа, в котором каждая вершина $x \in V \setminus V'$ смежна с вершиной из V' .

Для нахождения максимальных независимых и минимальных доминирующих множеств вершин в графе можно использовать метод Магу.

Алгоритм Магу для нахождения независимых множеств

В ходе алгоритмы используются понятия математической логики: булева переменная, конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы, основные равносильности алгебры высказываний, которые известны из курса информатики.

Пусть задан граф $G = (V, E)$, $A = (a_{ij})$ – его матрица смежности и S – максимальное независимое множество вершин.

С каждой вершиной графа v_i свяжем булеву переменную

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \in S \\ 0, & \text{если } v_i \notin S \end{cases}$$

Заметим, что если $(v_i, v_j) \in E$, то либо $v_i \notin S$, либо $v_j \notin S$, либо одновременно $v_i, v_j \notin S$. А значит для всех $i, j = \overline{1, n}$, таких что $a_{ij} \neq 0$ истинно высказывание $(\bar{x}_i \vee \bar{x}_j)$. Учитывая конечность графа

$$1 = \bigwedge_{a_{ij} \neq 0} (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j)$$

Преобразуем правую часть выражения к дизъюнктивной нормальной форме с помощью основных равносильностей алгебры высказываний:

$xy = yx, x \vee y = y \vee x$ - коммутативность;

$xx = x, x \vee x = x$ - идемпотентность;

$x(y \vee z) = xy \vee xz, x(y \wedge z) = xy \wedge xz$ - дистрибутивность;

$x \vee xy = x$ – поглощение.

Получим

$$1 = \bigvee_{i,j,k=\overline{1,n}} \bar{x}_i \bar{x}_j \dots \bar{x}_k$$

Данное высказывание истинно и позволяет сделать выводы о наборах вершин графа, не входящих одновременно в максимальные независимые множества вершин. Следовательно, получаем информацию о вершинах, образующих максимальные независимые множества.

Алгоритм Магу для нахождения доминирующих множеств

Пусть теперь задан граф $G = (V, E)$, $A = (a_{ij})$ – его матрица смежности и T – минимальное доминирующее множество вершин. Тогда для произвольной вершины $v_i \in V$ должно выполняться одно из двух условий (или оба одновременно):

- 1) вершина v_i принадлежит множеству T ;
- 2) существует некоторая вершина $v_j \in T$, что $(v_i, v_j) \in E$

Если с каждой вершиной связать булеву переменную

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in T \\ 0, & \text{если } x_i \notin T, \end{cases}$$

то будет справедливо высказывание

$$1 = \forall x_i [x_i \vee (\exists x_j a_{ij} \neq 0)]$$

Учитывая конечность графа

$$1 = \bigwedge_{i=\overline{1,n}} \left(x_i \vee \bigvee_{a_{ij} \neq 0} x_j \right) = \bigwedge_{i=\overline{1,n}} \bigvee_{a_{ij} \neq 0} x_i \vee x_j$$

Преобразовывая правую часть к дизъюнктивной нормальной форме, получим информацию о минимальных доминирующих множествах графа.

2. Алгоритм нахождения покрывающих множеств

Исходя из последнего примера можно предложить следующий алгоритм для нахождения покрывающих множеств.

1. Найдем минимальные доминирующие множества;
2. Найдем минимальные независимые множества;
3. Если среди найденных доминирующих есть независимые, то задача решена;
4. Иначе, задача решается полным перебором всех возможных вариантов.

3. Понятие планарности графа

Плоский граф – это граф, который нарисован на плоскости так, что никакие два его ребра не пересекаются (рис.4).

Планарный граф – граф, который может быть изображён на плоскости без пересечения рёбер. Иначе говоря, граф планарен, если он изоморфен некоторому плоскому графу, то есть графу, изображённому на плоскости так, что его вершины – это точки плоскости, а рёбра – непересекающиеся кривые на ней (рис. 3).

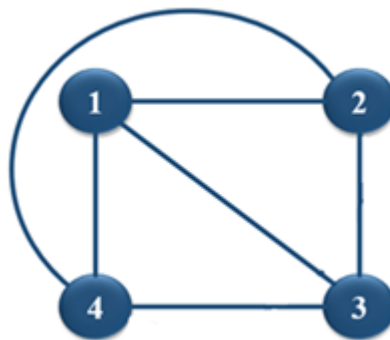
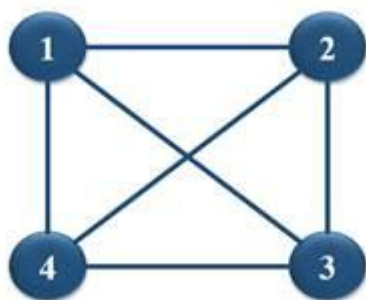


Рисунок 3. Планарный граф

Рисунок 4. Плоский граф

Непланарный граф не укладывается на плоскость. К непланарным относится полный граф с пятью вершинами (K_5) и граф «Домики и колодцы»($K_{3,3}$)

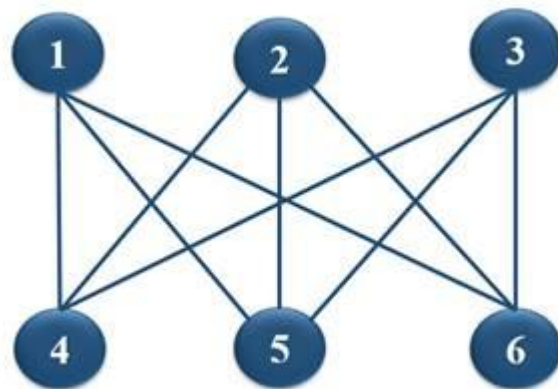
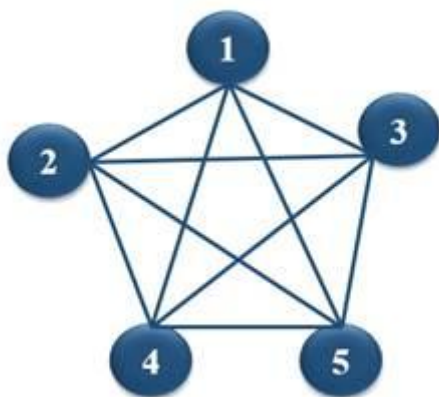


Рисунок 5. Полный граф с пятью вершинами *Рисунок 6. граф «Домики и колодцы»*

Теорема Понтрягина - Куратовского

Граф планарен тогда и только тогда, когда не содержит подграфов, стягивающихся в K_5 или $K_{3,3}$.

Заключение. В ходе работы были проиллюстрированы базовые понятия и алгоритмы теории графов для нахождения независимых и доминирующих множеств вершин. Изучено понятие планарности графа, приведены примеры планарных и непланарных графов. А также примеры нахождения покрывающих множеств на графах, содержащих небольшое количество вершин.

Список литературы:

1. Богдашкин А.Р., Шапиро Д.А., Жукова А.В. Использование алгоритмов теории графов для контроля территории // Молодежный научный форум: электр. сб. ст. по мат. СХХVII междунар. студ. науч.-практ. конф. № 17(127).
2. Зыков А.А. Основы теории графов / А.А. Зыков. – М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.
3. Татт У. Теория графов: Пер. с англ. –М.: Мир, 1988. – 424 с.
4. Домнин Л.Н. Элементы теории графов: учеб. пособие/Л.П. Домнин. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. –144 с.
5. Емеличев В.А. Лекции по теории графов / Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.–М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 384 с.
6. https://studopedia.ru/2_84961_ploskie-i-planarnie-grafi-ploskie-karti-teorema-eylera.html